EDISI REVISI 2018

MATEMATIKA

SMP/MTs

KELAS

IX

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis dan laman http://buku.kemdikbud.go.id atau melalui email buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika/ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- . Edisi Revisi Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018.
vi, 330 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMP/MTs Kelas IX
ISBN 978-602-282-984-3 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-989-8 (jilid 3)

1. Matematika -- Studi dan Pengajaran   I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Penulis : Subchan, Winarni, Muhammad Syifa'ul Mufid, Kistosil Fahim, dan Wawan Hafid Syaifudin.

Penelaah : Agung Lukito, Turmudi, Sri Wardhani, St. Suwarno, dan Alhadi Bustamam.

Pe-*review* : Rachimin

Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Cetakan Ke-1, 2015 (ISBN: 978-602-282-989-8 (jilid 3))
Cetakan Ke-2, 2018 (Edisi Revisi)
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah, Tuhan semesta alam. Berkat kuasa Allah SWT penulis bisa menuntaskan Buku Matematika Kelas IX SMP/MTs Kurikulum 2013 ini. Buku ini disusun berdasarkan Kurikulum 2013 yang diterbitkan oleh Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Republik Indonesia. Selain itu, buku ini juga ditulis dengan menyesuaikan materi dan kompetensi yang berdasar standar internasional seperti PISA (*Program for International Student Assessment*) dan TIMSS (*The International Mathematics and Science Survey*).

Siswa dalam pembelajaran Kurikulum 2013 tidak diperkenankan lagi meminta guru untuk memberikan semua pengetahuan secara langsung atau dengan metode lama yaitu ceramah. Dalam pembelajaran berdasarkan kurikulum 2013, siswa akan diajak, diarahkan, dan dipandu oleh guru agar siswa secara aktif menggali pengetahuan, menemukan dan mengkontruksi suatu konsep dengan beraktivitas dan bernalar melalui kegiatan-kegiatan yang disajikan. Pembelajaran matematika diarahkan agar siswa mampu berpikir rasional, kritis dan kreatif, memiliki rasa ingin tahu yang tinggi pada ilmu pengetahuan, mampu berkomunikasi dan bekerjasama, jujur, konsisten, dan tangguh dalam menghadapi masalah. Untuk itu, pembelajaran dilakukan dengan pendekatan pembelajaran ilmiah yang mencakup lima hal, yaitu (1) mengamati suatu objek, fenomena, kejadian, atau informasi lainnya; (2) membuat pertanyaan/menanya; (3) menggali/mengumpulkan informasi/mencoba; (4) menalar/mengasosiasi/menganalisa; dan (5) mengkomunikasikan.

Pembahasan materi dalam buku ini selalu didahului dengan pengetahuan konkret yang dijumpai siswa dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan konkret tersebut dipergunakan sebagai jembatan untuk menuju ke dunia matematika abstrak melalui pemanfaatan simbol-simbol matematika yang sesuai melalui permodelan. Sesampainya pada ranah abstrak, metode-metode matematika diperkenalkan untuk menyelesaikan model permasalahan yang diperoleh dan mengembalikan hasilnya pada ranah konkret. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, siswa diharuskan untuk mencari dan mengeksplorasi sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap siswa dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan dan media belajar lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Terkait dengan materi, dalam kurikulum 2013 sejak kelas VII telah diajarkan antara lain tentang data dan peluang; pola dan barisan bilangan, aljabar, dan bangun; serta transformasi geometri. Keseimbangan antara matematika angka dan matematika pola dan bangun selalu dijaga. Kompetensi pengetahuan bukan hanya sampai memahami secara konseptual tetapi sampai ke penerapan melalui pengetahuan prosedural dalam pemecahan masalah matematika termasuk dalam masalah dalam kehidupan nyata. Kompetensi keterampilan berfikir juga diasah untuk dapat memecahkan masalah yang membutuhkan pemikiran order tinggi seperti menalar pemecahan masalah melalui pemodelan, pembuktian dan perkiraan/pendekatan.

Implementasi kurikulum 2013 yang telah berjalan selama tiga tahun ini telah mendapat tanggapan yang positif dan masukan yang sangat berharga. Berbagai evaluasi dan revisi juga dilakukan oleh Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah. Hal tersebut dipergunakan semaksimal mungkin, salah satunya dengan menyiapkan buku untuk menyempurnakan implementasi pada tahun ajaran 2016/2017 dan seterusnya. Sebagai edisi revisi pertama, buku ini sangat terbuka dan perlu dilakukan perbaikan untuk penyempurnaan. Oleh karena itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Kritik, saran, dan masukan dapat disampaikan melalui email. Atas kontribusi tersebut, kami mengucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan Indonesia yang lebih baik.

Selamat belajar putra-putri Indonesia, generasi penerus bangsa tercinta. Kelak di tanganmulah bangsa, negara bahkan dunia ini. Belajarlah dengan sungguh-sungguh, niatkanlah untuk mempersiapkan bekal dunia dan akhiratmu. Semoga Allah SWT senantiasa memberi kekuatan dan memudahkan langkahmu dalam jalan kebaikan.

Jakarta, Januari 2016

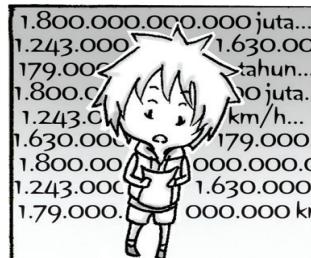
Tim Penulis

1...
2...
3...
DAFTAR ISI

Belajar memang melelahkan,

namun lebih lelah nanti jikalau saat ini tidak belajar.

Bab I

Perpangkatan dan Bentuk Akar

Kata Kunci

- *Bilangan Berpangkat*
- *Bentuk Akar*
- *Notasi Ilmiah*

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Kompetensi Dasar

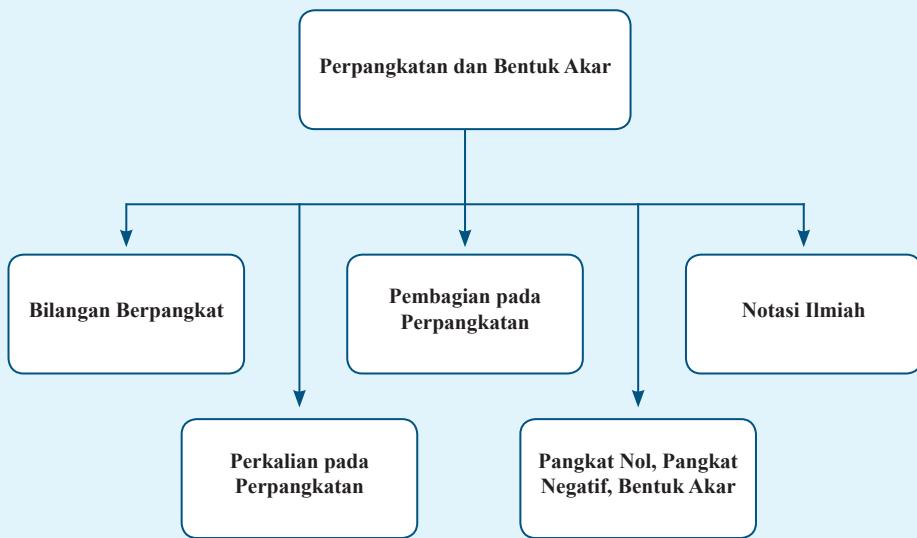
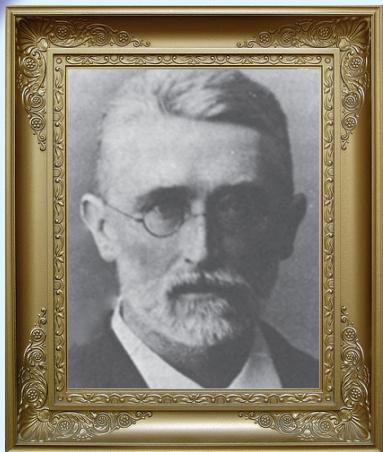
3.1 *Menjelaskan dan melakukan operasi bilangan berpangkat bulat dan bentuk akar, serta sifat-sifatnya.*

4.1 *Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat operasi bilangan berpangkat bulat dan bentuk akar.*

Tahukah kamu berapakah jarak planet bumi ke matahari? Berapa massa matahari, massa bumi, massa bulan, dan lainnya? Kamu telah mempelajarinya dalam pelajaran IPA tentang Tata Surya, bukan? Bagaimana kamu menuliskan jarak tersebut dalam bentuk yang lebih sederhana?

Dapatkah kamu melihat seekor bakteri dengan mata telanjang? Mengapa kamu tidak dapat melihatnya tanpa bantuan mikroskop? Berapakah ukuran panjang bakteri tersebut? Dapatkah kamu menuliskan dalam bentuk yang lebih sederhana untuk ukuran yang sangat kecil tersebut?

Pernahkah kamu mempelajari pembelahan sel pada seekor hewan bersel satu seperti Amoeba dalam pelajaran IPA? Bagaimanakah pola pembelahan seekor Amoeba yang terbentuk tiap satuan waktunya? Berapakah kira-kira jumlah sel yang terbentuk setelah membelah selama waktu tertentu? Kamu tidak mungkin menghitungnya secara pasti, bagaimanakah kamu dapat memperkirakan jumlah tersebut?

Nah, masalah-masalah tersebut di atas dapat diselesaikan dengan konsep perpangkatan. Konsep perpangkatan dan kaitannya dengan bentuk akar akan kita pelajari bersama di Bab 1 ini.

Pengalaman Belajar

1. *Mengidentifikasi, mendeskripsikan, menjelaskan sifat bentuk pangkat berdasarkan hasil pengamatan.*
2. *Menyelesaikan permasalahan nyata yang berhubungan dengan perpangkatan dan bentuk akar.*
3. *Menggunakan notasi ilmiah atau bentuk baku untuk menuliskan bilangan yang sangat besar dan sangat kecil.*

Peta Konsep
Perpangkatan dan Bentuk Akar
Bilangan Berpangkat
Pembagian pada Perpangkatan
Notasi Ilmiah
Perkalian pada Perpangkatan
Pangkat Nol, Pangkat Negatif, Bentuk Akar

Sumber: *www.stanford.edu*

Julius Wilhelm Richard Dedekind

Julius Wilhelm Richard Dedekind lahir pada 3 Oktober 1831 dan wafat pada 12 Februari 1916, pada usia 85 tahun. Beliau merupakan matematikawan berasal dari Jerman yang sangat dipertimbangkan dalam sejarah matematika, sebagai salah satu penemu di bidang matematika. Pemikiran Dedekind banyak dijadikan metode untuk membentuk konsep baru (*The Man and The Number*, 1982). Dedekind menyebutkan bahwa dari konsep itu angka adalah kreasi pikiran manusia. Beliau menemukan konsep bilangan secara kuantitif dan merupakan representatif suatu label yang disebut bilangan.

Dedekind merupakan professor di Pholytecnic School di Zurich, Jerman. Selama hidupnya, Dedekind banyak menerima penghargaan dalam bidang matematika ketika bekerja. Dia terpilih dalam *Göttingen Academy* (1862), *The Berlin Academy* (1880), *Academy of Rome, The Leopoldino-California Naturae Curiosorum Academia,* dan *the Académie des Sciences in Paris* (1900). Penghargaan dalam bidang doktoral diberikan kepadanya oleh The Universities of Kristiania (Oslo), Zurich and Brunswick. Pada tahun 1879 Dedekin menerbitkan buku berjudul *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen* yang sekali lagi memberikan pengaruh sangat besar terhadap dasar-dasar Matematika. Hikmah yang dapat diambil dari biografi singkat Richard Dedekind antara lain sebagai berikut.

- Semangat Dedekind untuk merumuskan suatu teori bilangan yang lebih sederhana dan dapat dipahami sekaligus sebagai dasar metodologi konsep-konsep modern pada usia yang relatif muda.
- Dedekind tetap rendah hati sehingga dia selalu memiliki semangat belajar yang tinggi sekalipun telah menjadi seorang pengajar.
- Dedekind tidak mudah puas dengan segala penghargaan yang telah dianugerahkan kepadanya terbukti dengan keaktifannya dalam hal penelitian khususnya teori aljabar.

1.1 Bilangan Berpangkat

Bagaimana kamu dapat menggunakan bentuk pangkat untuk menyederhanakan penulisan sebuah bilangan?

Kegiatan 1 Memahami Konsep Bilangan Berpangkat

Lakukan kegiatan ini dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 1.1 Kertas dan gunting

1. Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 orang.
2. Sediakan selembar kertas serta sebuah gunting kertas.
3. Lipatlah kertas itu menjadi dua bagian sama besar, yaitu pada sumbu simetri lipatnya.
4. Guntinglah kertas pada sumbu simetri lipatnya.
5. Tumpuklah hasil guntingan kertas sehingga tepat menutupi satu dengan yang lain.
6. Berikan kertas tersebut kepada temanmu berikutnya, lalu lakukan Langkah 3 sampai 5 secara berulang sampai seluruh temanmu dalam kelompokmu mendapat giliran.
7. Banyak kertas hasil guntingan pada tiap-tiap pengguntingan selanjutnya disebut dengan banyak kertas. Tuliskan banyak kertas pada tabel berikut:

Pengguntingan ke-	Banyak Kertas
1	2
2	...
3	...
4	...
5	...

Dari Kegiatan 1, diperoleh bahwa banyak kertas hasil pengguntingan ke-2 adalah 2 kali lipat dari banyak kertas hasil pengguntingan ke-1. Banyak kertas hasil pengguntingan ke-3 adalah 2 kali lipat dari banyak kertas hasil pengguntingan ke-2, dan seterusnya. Jika kamu melakukan pengguntingan kertas sebanyak n kali maka banyak kertas hasil pengguntingan ke- n adalah

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{2 \text{ sebanyak } n}$$

Perkalian berulang dari bilangan 2 sebanyak n seperti di atas dapat juga ditulis dengan 2^n dan dapat juga disebut dengan perpangkatan 2. Secara umum, perkalian berulang dari suatu bilangan a dapat disebut dengan **perpangkatan *a***.

Contoh,

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$ dapat disebut dengan **perpangkatan 3**.

$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^4$ dapat disebut dengan **perpangkatan –2**.

Lakukan kembali Kegiatan 1, tetapi kertas dilipat menjadi 4 bagian yang sama besar berdasarkan sumbu simetri lipatnya (vertikal dan horizontal). Kemudian tuliskan jawabanmu seperti tabel di atas. Apakah banyak kertas hasil guntingan pada tiap-tiap pengguntingan jumlahnya sama dengan yang telah kamu lakukan sebelumnya? Mengapa hal tersebut bisa terjadi? Jelaskan secara singkat.

Paparkan/presentasikan percobaan di atas di depan teman sekelasmu.

Kegiatan 2 Menggunakan Notasi Pangkat

Setelah memahami konsep perpangkatan pada Kegiatan 1, selanjutnya pada kegiatan ini kamu akan menyatakan perpangkatan dalam bentuk perkalian berulang.

Amatilah tabel berikut ini.

Perpangkatan	Bentuk Perkalian	Nilai
5^2	5×5	25
5^3	$5 \times 5 \times 5$	125
5^4	$5 \times 5 \times 5 \times 5$	625

5^3 merupakan perpangkatan dari 5. Bilangan 5 merupakan *basis* atau bilangan pokok sedangkan 3 merupakan *eksponen* atau pangkat.

Buatlah pertanyaan dengan menggunakan kata ”basis” dan ”eksponen”.

Setelah mengamati tabel di atas, lengkapilah tabel di bawah ini.

Perpangkatan	Bentuk Perkalian	Nilai
2^4		
3^3		
4^5		
5^4		
10^7		

Berdasarkan tabel di atas, tuliskan kembali 8^n dengan n bilangan bulat positif dalam bentuk perkalian.

Setelah melakukan Kegiatan 2, apa yang dapat kamu simpulkan berkaitan dengan perpangkatan?

Perpangkatan adalah perkalian berulang dari suatu bilangan yang sama. Bilangan pokok dalam suatu perpangkatan disebut .... Banyaknya bilangan pokok yang dikalikan secara berulang disebut ....

Sehingga bentuk umum dari perpangkatan adalah

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n}, \quad \text{dengan } n \text{ bilangan bulat positif}$$

a disebut dengan ...., *n* disebut ....

Materi Esensi 1.1 Bilangan Berpangkat

Perpangkatan adalah perkalian berulang dari suatu bilangan yang sama. Bentuk umum dari perpangkatan adalah

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n}, \quad \text{dengan } n \text{ bilangan bulat positif}$$

Contoh, perpangkatan 3 seperti di bawah ini:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

3^5 adalah perpangkatan 3.
3 disebut sebagai bilangan pokok (*basis*) sedangkan 5 sebagai pangkat (*eksponen*).

Contoh 1 Menuliskan Perpangkatan

Nyatakan perkalian berikut dalam perpangkatan.

a. $(-2) \times (-2) \times (-2)$

Karena (–2) dikalikan berulang sebanyak tiga kali maka $(-2) \times (-2) \times (-2)$ merupakan perpangkatan dengan basis (–2) dan pangkat 3.

Jadi $(-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^3$

b. $y \times y \times y \times y \times y \times y$

Karena y dikalikan berulang sebanyak enam kali maka $y \times y \times y \times y \times y \times y$ merupakan perpangkatan dengan basis y dan pangkat 6.

Jadi $y \times y \times y \times y \times y \times y = y^6$

Contoh 2 Menghitung Nilai Perpangkatan

1. Nyatakan perpangkatan $(-0{,}3)^2$ dan $(0{,}3)^2$ dalam bentuk bilangan biasa.

   $(-0{,}3)^2 = (-0{,}3) \times (-0{,}3)$ Tulis kembali dalam bentuk perkalian berulang

   $= 0{,}09$ Sederhanakan

   $(0{,}3)^2 = (0{,}3) \times (0{,}3)$ Tulis kembali dalam bentuk perkalian berulang

   $= 0{,}09$ Sederhanakan

2. Nyatakan perpangkatan $(-0{,}3)^3$ dan $(0{,}3)^3$ dalam bentuk bilangan biasa.

   $(-0{,}3)^3 = (-0{,}3) \times (-0{,}3) \times (-0{,}3)$ Tulis dalam bentuk perkalian berulang

   $= -0{,}027$ Sederhanakan

   $(0{,}3)^3 = (0{,}3) \times (0{,}3) \times (0{,}3)$ Tulis dalam bentuk perkalian berulang

   $= 0{,}027$ Sederhanakan

3. Nyatakan perpangkatan $(-2)^3$ dan $(-2)^4$ dalam bentuk bilangan biasa.

   $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$ Tulis dalam bentuk perkalian berulang

   $= -8$ Sederhanakan

   $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ Tulis dalam bentuk perkalian berulang

   $= 16$ Sederhanakan

Ayo Kita Menalar

Berdasarkan Contoh 2, tentukan perbedaan dari:

1. Perpangkatan dengan basis bilangan positif dan negatif.
2. Perpangkatan dengan eksponen bilangan ganjil dan genap.

Jelaskan jawabanmu.

Contoh 3 Operasi yang Melibatkan Perpangkatan

Tentukan hasil operasi berikut.

a. $3 + 2 \times 5^2$ — Ingat kembali mengenai urutan operasi hitung

$3 + 2 \times 5^2 = 3 + 2 \times 25$ — Hitung hasil perpangkatan

$= 3 + 50$ — Lakukan operasi perkalian

$= 53$ — Lakukan operasi penjumlahan

b. $4^3 : 8 + 3^2$

$4^3 : 8 + 3^2 = 64 : 8 + 9$ — Hitung hasil tiap-tiap perpangkatan

$= 8 + 9$ — Lakukan operasi pembagian dulu

$= 17$ — Lakukan operasi penjumlahan

Ayo Kita Tinjau Ulang

Selesaikan soal-soal di bawah ini.

1. Tuliskan ke dalam bentuk perpangkatan.

   a. $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

   b. $t \times t \times 2 \times 2 \times 2$

2. Tentukan hasil dari:

   a. $9 : 3 \times 4^3$

   b. $\left(\frac{1}{8}\right)^3 \times 4^2 + \frac{1}{2}$

   c. -6^6

3. Tentukan nilai dari:

   a. $p^n + (-p)^n$ untuk p bilangan bulat dan n bilangan asli genap,

   b. $p^n + (-p)^n$ untuk p bilangan bulat dan n bilangan asli ganjil.

Latihan 1.1 Bilangan Berpangkat

1. Nyatakan perkalian berulang berikut dalam perpangkatan

   a. $(-2) \times (-2) \times (-2)$

   b. $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

   c. $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

   d. $t \times t \times t \times t \times t \times t$

   e. $y \times y \times y \times y \times y \times y \times y \times y \times y \times y$

2. Nyatakan perpangkatan berikut dalam bentuk perkalian berulang.

   a. 3^8

   b. $(0{,}83)^4$

   c. t^3

   d. $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$

   e. $-\left(\frac{1}{4}\right)^4$

3. Tentukan hasil dari perpangkatan berikut.

   a. 2^8

   b. 5^4

   c. $(0{,}02)^2$

   d. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

   e. $-\left(\frac{1}{4}\right)^4$

4. Nyatakan bilangan berikut dalam perpangkatan dengan basis 10.

   a. 1.000

   b. 100.000

   c. 1.000.000

   d. 10.000.000

5. Nyatakan bilangan berikut dalam perpangkatan dengan basis 2.

   a. 256

   b. 64

   c. 512

   d. 1.048.576

6. Tuliskan sebagai bentuk perpangkatan dengan basis 5.

   a. 5

   b. 625

   c. 15.625

   d. 125

7. Tentukan hasil dari operasi berikut ini.

   a. $5 + 3 \times 2^4$

   b. $\frac{1}{2}\left(6^3 - 4^2\right)$

   c. $8 + 3 \times (-3)^4$

   d. $(6^4 - 4^4) : 2$

   e. $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

   f. $\left(\frac{1}{4}\right)^4 : -\left(\frac{1}{3}\right)^2$

8. Temukan nilai *x* pada persamaan matematika di bawah ini.

   a. $7^x = 343$

   b. $2^x = 64$

   c. $10^x = 10.000$

   d. $5^x = 625$

9. Tim peneliti dari Dinas Kesehatan suatu daerah di Indonesia Timur meneliti suatu wabah yang sedang berkembang di Desa X. Tim peneliti tersebut menemukan fakta bahwa wabah yang berkembang disebabkan oleh virus yang tengah berkembang di Afrika. Dari hasil penelitian didapatkan bahwa virus tersebut dapat berkembang dengan cara membelah diri menjadi 3 virus setiap setengah jam dan menyerang sistem kekebalan tubuh. Berapa jumlah virus dalam tubuh manusia setelah 6 jam?

10. **Tantangan**. Dalam sebuah penelitian, diketahui seekor amoeba S berkembang biak dengan membelah diri sebanyak 2 kali tiap 15 menit.

    a. Berapa jumlah amoeba S selama satu hari jika dalam suatu pengamatan terdapat 4 ekor amoeba S?

    b. Berapa jumlah amoeba S mula-mula sehingga dalam 1 jam terdapat minimal 1.000 Amoeba S?

1.2 Perkalian pada Perpangkatan

Bagaimana hasil perkalian dari dua perpangkatan dengan basis yang sama?

Mengalikan Dua Perpangkatan dengan Basis yang Sama

Amatilah tabel di bawah ini.

Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Operasi Perkalian	Perpangkatan
$3^2 \times 3^3$	$(3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$	3^5
$(-3)^2 \times (-3)^3$	$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$	$(-3)^5$
$y^5 \times y^2$	$(y \times y \times y \times y \times y) \times (y \times y)$	y^7

Setelah kamu mengamati tabel di atas, lengkapilah tabel di bawah ini.

Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Operasi Perkalian	Perpangkatan
$6^3 \times 6^2$		
$4{,}2^2 \times 4{,}2^3$		
$7^4 \times 7^2$		

Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Operasi Perkalian	Perpangkatan
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$		
$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^4$		
$5^3 \times 3^3$		

Setelah melengkapi tabel di atas, informasi apakah yang kamu dapatkan mengenai operasi perkalian pada perpangkatan?

Sederhanakan operasi perkalian pada perpangkatan dengan basis a di bawah ini.

$$a^m \times a^n = a^{\cdots\cdots}$$

Apakah aturan yang kamu dapatkan berlaku untuk operasi perkalian pada perpangkatan dengan basis yang berbeda? Sebagai contoh pada $5^4 \times 2^3$, apakah dapat diterapkan aturan di atas? Jelaskan jawabanmu.

Bagaimana cara menentukan hasil operasi perkalian pada perpangkatan dengan basis yang sama?

Kegiatan 2 Memangkatkan Suatu Perpangkatan

Amati tabel berikut ini.

Pemangkatan Suatu Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(4^2)^3$	$4^2 \times 4^2 \times 4^2 = (4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4)$ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	4^6
$(4^3)^2$	$4^3 \times 4^3 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	4^6
$(s^4)^2$	$s^4 \times s^4 = (s \times s \times s \times s) \times (s \times s \times s \times s)$ $= s \times s \times s \times s \times s \times s \times s \times s$	s^8
$(s^2)^4$	$s^2 \times s^2 \times s^2 \times s^2 = (s \times s) \times (s \times s) \times (s \times s) \times (s \times s)$ $= s \times s \times s \times s \times s \times s \times s \times s$	s^8

Dari tabel di atas, perhatikan kembali kolom pertama dan ketiga. Apa yang dapat kamu simpulkan?

Setelah mengamati tabel di atas, buatlah pertanyaan yang berhubungan dengan "memangkatkan suatu perpangkatan".

Setelah mengamati tabel di atas, salin dan lengkapilah tabel di bawah ini.

Pemangkatan Suatu Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(7^4)^3$		
$(7^3)^4$		
$(t^4)^3$		
$(t^3)^4$		

Secara umum bentuk $(a^m)^n$ dapat diubah menjadi

$$(a^m)^n = a^{\cdots\cdots}$$

Ayo Kita Simpulkan

Bagaimana cara menentukan hasil dari perpangkatan yang dipangkatkan?

Kegiatan 3 Memangkatkan Suatu Perkalian Bilangan

Amatilah tabel di bawah ini.

Pemangkatan Pada Perkalian Bilangan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(2 \times 3)^3$	$(2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ $= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$ $= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$	$2^3 \times 3^3$
$(2 \times 5)^4$	$(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$ $= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$	$2^4 \times 5^4$
$(b \times y)^2$	$(b \times y) \times (b \times y)$ $= b \times y \times b \times y$ $= (b \times b) \times (y \times y)$	$b^2 \times y^2$

Lengkapilah tabel di bawah ini.

Pemangkatan Pada Perkalian Bilangan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(7 \times 9)^3$		
$(13 \times 7)^5$		
$(n \times y)^2$		
$(6 \times t)^3$		
$(2 \times 7)^4$		

Secara umum bentuk $(a \times b)^m$ dapat diubah menjadi

$$(a \times b)^m = \text{..........}$$

Bagaimana cara menentukan hasil perpangkatan pada perkalian bilangan?

Kegiatan 4 Permainan Menuliskan Perpangkatan

Lakukan kegiatan ini secara berkelompok.

1. Siapkan 1 lembar kertas karton, penggaris, pensil, serta uang koin.
2. Buatlah tabel seperti gambar di bawah ini.

3. Tumpuklah koin pada tiap-tiap kotak dengan ketentuan berikut.

   Banyaknya koin pada kotak dengan baris x dan kolom y adalah $2^x \times 2^y$

   Contoh: pada baris ke-1 dan kolom ke-2 tabel di atas, banyak koin $2^1 \times 2^2 = 2^3 = 8$ koin.

Berdasarkan percobaan di atas, jawablah pertanyaan di bawah ini.

a. Berapa jumlah koin pada baris ke-3 dan kolom ke-2?
b. Pada baris dan kolom berapa terdapat koin sejumlah 32?
c. Pada baris dan kolom berapa terdapat koin paling banyak, dan berapa banyaknya?

Berdasarkan konsep yang diperoleh dari Kegiatan 4, jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Jika tabel yang kamu buat berukuran 5 × 5, tentukan berapa banyak koin pada baris ke-5 dan kolom ke-3?
2. Berapa tinggi tumpukan koin pada baris ke-5 dan kolom ke-5, jika sebuah koin memiliki tebal 0,2 cm?

Materi Esensi 1.2 Perkalian pada Perpangkatan

Hasil kali dari perpangkatan dengan basis yang sama

Sifat perkalian dalam perpangkatan: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Contoh: $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$

Hasil pemangkatan dari perpangkatan dengan basis yang sama

Sifat pemangkatan pada perpangkatan: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{mn}$

Contoh: $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$

Hasil perpangkatan dari suatu perkalian bilangan

Sifat perpangkatan dari perkalian bilangan: $(a \cdot b)^m = a^m b^m$

Contoh: $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$

Contoh 1 Menyederhanakan Operasi Perkalian pada Perpangkatan

Sederhanakan operasi perkalian pada perpangkatan berikut ini.

a. $4^3 \times 4^2 = 4^{3+2}$ — Jumlahkan pangkatnya

$= 4^5$ — Sederhanakan

b. $(-4)^2 \times (-4)^3 = (-4)^2 \times (-4)^3$ — Samakan bentuk basis menjadi (–4)

$= (-4)^{2+3}$ — Jumlahkan pangkat dari basis (–4)

$= (-4)^5$ — Sederhanakan

c. $m^3 \times m^5 = m^{3+5}$ — Jumlahkan pangkat dari basis m

$= m^8$ — Sederhanakan

Contoh 2 Memangkatkan Suatu Perpangkatan

Sederhanakan operasi pemangkatan pada perpangkatan berikut ini.

a. $(4^3)^2 = 4^3 \times 4^3$ — Ubah menjadi bentuk perkalian berulang

$= 4^{3+3}$ — Jumlahkan pangkatnya

$= 4^6$ — Sederhanakan

b. $(x^3)^4 = x^3 \times x^3 \times x^3 \times x^3$ — Ubah menjadi bentuk perkalian berulang

$= x^{3+3+3+3}$ — Jumlahkan pangkatnya

$= x^{12}$ — Sederhanakan

Contoh 3 Perpangakatan pada Perkalian Bilangan

Sederhanakan perpangkatan pada perkalian bilangan berikut ini.

a. $(4y)^2 = 4y \times 4y$ — Ubah menjadi bentuk perkalian berulang

$= (4 \times 4) \times (y \times y)$ — Kelompokkan basis yang sama

$= 4^2 \times y^2$ — Jumlahkan tiap-tiap pangkatnya

$= 16y^2$ — Sederhanakan

b. $(wy)^3 = wy \times wy \times wy$ — Ubah menjadi bentuk perkalian berulang

$= (w \times w \times w) \times (y \times y \times y)$ — Kelompokkan yang sama

$= w^3y^3$ — Sederhanakan

Ayo Kita Tinjau Ulang

1. Sederhanakan perkalian dari perpangkatan berikut.

   a. $7^3 \times 7^2$ b. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$ c. $t \times t^{-1}$

2. Sederhanakan bentuk berikut.

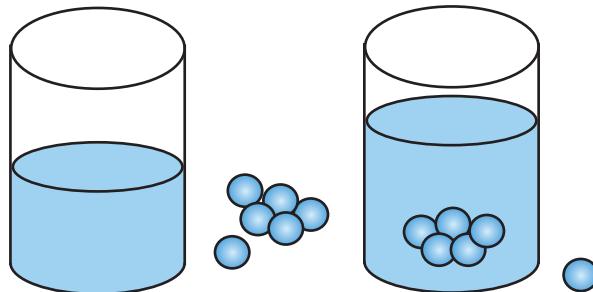
   a. $(9^4)^3$ b. $(z^3)^6$ c. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2$

3. Sederhanakan operasi berikut ini.

   a. $7^2 \times 7^3$

   b. $(9^3)^4$

   Bandingkan jawaban soal nomor 3(a) dengan soal nomor 1 (a) dan soal nomor 3 (b) dengan soal nomor 2(a). Apakah jawaban yang kamu dapat bernilai sama? Mengapa demikian? Jelaskan.

Latihan 1.2 Perkalian pada Perpangkatan

1. Sederhanakan perpangkatan berikut ini.

   a. $4^6 \times 4^3$

   b. $(-7)^3 \times (-7)^2$

   c. $4(-2{,}5)^4 \times (-2{,}5)^3$

   d. $(5^2)^3$

   e. $5^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5$

2. Tuliskan bentuk $w^3 \times w^4$ ke dalam bentuk perpangkatan paling sederhana. Berapakah hasilnya? Apakah kamu juga dapat menyederhakan bentuk $w^3 \times n^4$? Jelaskan jawabanmu.

3. Sederhanakan operasi aljabar berikut ini.

   a. $y^3 \times 2y^7 \times (3y)^2$

   b. $b \times 2y^7 \times b^3 \times y^2$

   c. $3m^3 \times (mn)^4$

   d. $(tn^3)^4 \times 4t^3$

   e. $(2x^3) \times 3(x^2y^2)^3 \times 5y^4$

4. Tentukan nilai dari perpangkatan berikut ini.

   a. $3^3 \times 2 \times 3^7$

   b. $(2^2 \times 1^6) + 50$

   c. $\frac{1}{2}^3 \times \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^4$

   d. $2^4 \times 4 \times 2^3$

5. Nyatakan perpangkatan berikut dalam bentuk paling sederhana.

   a. $4^3 \times 2^6$

   b. $(3^2)^5 \times 3^5$

   c. $4 \times 3^4 + 5 \times 3^4$

   d. $(-125) \times (-5)^6$

6. Nyatakan bilangan di bawah ini dalam bentuk yang memuat perpangkatan dengan basis 2.

   a. 64
   b. 20
   c. 100
   d. $\frac{128}{3}$

7. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut ini.

   a. $(3^x)^x = 81$
   b. $\frac{1}{64} \times 4^x \times 2^x = 64$

8. **Berpikir Kritis**. Nyatakan hasil kali perpangkatan berikut dalam bentuk pangkat yang lebih sederhana. Jelaskan. Gunakan cara yang lebih mudah.

$$4^3 \times 5^6$$

9. Ketinggian suatu benda dapat ditentukan dengan menggunakan rumus gerak jatuh bebas, yaitu $h = \frac{1}{2}gt^2$ di mana h adalah ketinggian benda (dalam satuan meter), g adalah percepatan gravitasi bumi (m/s^2), dan t adalah waktu yang diperlukan benda sampai jatuh ke tanah "(s)". Sebuah benda jatuh dari puncak sebuah gedung dengan percepatan 9,8 m/s^2 dan waktu yang diperlukan untuk sampai di tanah adalah 10 detik, berapa tinggi gedung tersebut?

10. Diketahui: $3^{1500} + 9^{750} + 27^{500} = 3^b$, berapakah nilai b?

11. **Analisis Kesalahan.** Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam menyederhanakan hasil perkalian bentuk pangkat berikut ini.

   a. $3^6 \times 3^4 = (3 \times 3)^{6+4} = 9^{10}$
   b. $(t^{-3})^6 = t^{-3+6} = t^3$

12. **Tantangan**. Pada sebuah pasar tradisional perputaran uang yang terjadi setiap menitnya diperkirakan kurang lebih Rp81.000.000,00. Pada hari Senin–Jumat proses perdagangan terjadi rata-rata 12 jam tiap hari. Sedangkan untuk Sabtu–Minggu proses jual-beli terjadi rata-rata 18 jam tiap hari. Berapa jumlah perputaran uang di pasar tradisional tersebut selama 1 minggu? (nyatakan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan).

13. **Tantangan**. Sebuah bola karet dengan diameter 7 cm direndam dalam sebuah bejana berisi minyak tanah selama 3 jam. Jika pertambahan diameter bola karet tersebut 0,002 mm/detik, berapakah volume bola karet setelah proses perendaman?

Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 1.2 Bejana berisi minyak tanah dan bola karet

Keterangan: gunakan rumus volumer bola: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, dengan $\pi = 3{,}14$ dan r adalah jari-jari bola.

1.3 Pembagian pada Perpangkatan

Pertanyaan Penting

Bagaimana hasil pembagian dari dua perpangkatan yang memiliki basis sama?

Kegiatan 1 Pembagian pada Perpangkatan

Ayo Kita Amati

Amatilah tabel di bawah ini.

Pembagian Pada Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$\frac{3^9}{3^4}$	$\frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$	3^5

Pembagian pada Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$\frac{(-2)^6}{(-2)^3}$	$\frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)}$	$(-2)^3$
$\frac{6^8}{6^4}$	$\frac{6\times6\times6\times6\times6\times6\times6\times6}{6\times6\times6\times6}$	6^4

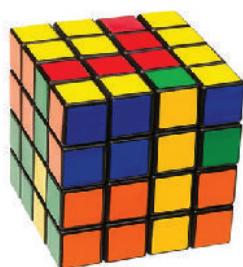
Buatlah pertanyaan yang berkaitan dengan "pembagian pada perpangkatan".

Setelah kamu mengamati tabel di atas, lengkapilah tabel di bawah ini.

Pembagian pada Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$\frac{(4,2)^{10}}{(4,2)^5}$		
$\frac{(-7)^7}{(-7)^5}$		
$\frac{2^7}{2^1}$		
$\frac{(-2,5)^4}{(-2,5)^2}$		
$\frac{10^9}{10^3}$		

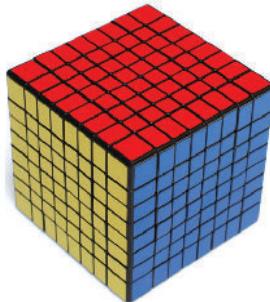
Secara umum bentuk $\frac{a^m}{a^n}$ dapat diubah menjadi

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{\dots\dots}$$

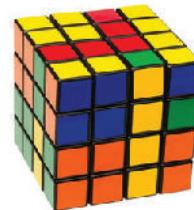
Ayo Kita Simpulkan

Bagaimana cara untuk mendapatkan hasil pembagian pada perpangkatan?

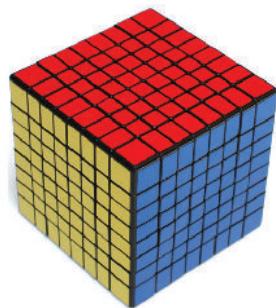
Kegiatan 2 Membandingkan Volume

Perhatikan gambar kubus di bawah ini.

a. Kubus besar dengan s = 4 satuan

Sumber: www.toysrus.com
Gambar 1.3 Rubik ukuran 4 × 4 × 4

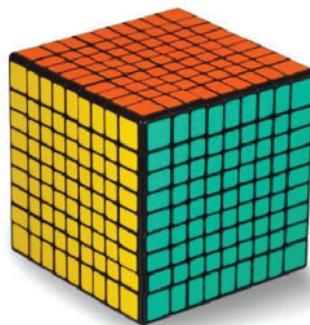
Kubus kecil dengan s = 2 satuan

Sumber: www.bestworldstuff.blogspot.com
Gambar 1.4 Rubik ukuran 2 × 2 × 2

b. Kubus besar dengan s = 8 satuan

Sumber: www.cs.brandeis.edu
Gambar 1.5 Rubik ukuran 8 × 8 × 8

Kubus kecil dengan s = 4 satuan

Sumber: www.toysrus.com
Gambar 1.6 Rubik ukuran 4 × 4 × 4

c. Kubus besar dengan $s = 8$ satuan

Sumber: www.cs.brandeis.edu
Gambar 1.7 Rubik ukuran $8 \times 8 \times 8$

Kubus kecil dengan $s = 2$ satuan

Sumber: www.bestworldstuff.blogspot.com
Gambar 1.8 Rubik ukuran $2 \times 2 \times 2$

d. Kubus besar dengan s = 9 satuan

Sumber: www.thespeedcube.com
Gambar 1.9 Rubik ukuran $9 \times 9 \times 9$

Kubus kecil dengan $s = 3$ satuan

Sumber: www.pebbryant.blogspot.com
Gambar 1.10 Rubik ukuran $3 \times 3 \times 3$

Tentukan volume tiap-tiap kubus dan bandingkan volume kubus besar terhadap volume kubus kecil dengan panjang panjang rusuk *s*. Catat hasil yang kamu peroleh dalam tabel.

	Volume Kubus Besar	Volume Kubus Kecil	$\dfrac{\text{Volume Kubus Besar}}{\text{Volume Kubus Kecil}}$
a.	$4^3 = (2^2)^3 = 2^6$	2^3	$\dfrac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3$
b.			
c.			
d.			

Diskusi

1. Bagaimana cara membagi dua perpangkatan dengan basis yang sama?
2. Berikan dua contoh lain yang mendukung jawaban.

Kegiatan 3 Perpangkatan pada Pecahan

Ayo Kita Amati

Amatilah tabel di bawah ini.

Perpangkatan pada Pecahan	Bentuk Perkalian Berulang	Bentuk Pembagian pada Perpangkatan
$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$	$\frac{2^3}{3^3}$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$	$-\frac{2^3}{3^3}$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}$	$\frac{2^4}{3^4}$

Ayo Kita Mencoba

Setelah kamu mengamati tabel pada Kegiatan 3, lengkapilah tabel di bawah ini.

Perpangkatan pada Pecahan	Bentuk Perkalian Berulang	Bentuk Pembagian pada Perpangkatan
$\left(\frac{4}{5}\right)^4$		

Perpangkatan pada Pecahan	Bentuk Perkalian Berulang	Bentuk Pembagian pada Perpangkatan
$\left(-\frac{4}{5}\right)^4$		
$\left(-\frac{4}{5}\right)^5$		
$\left(\frac{5}{3}\right)^3$		
$\left(-\frac{5}{3}\right)^3$		
$\left(-\frac{5}{3}\right)^4$		

Ayo Kita Simpulkan

Secara umum bentuk $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ dapat diubah menjadi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{....}{....}$$

Materi Esensi 1.3 Pembagian pada Perpangkatan

Hasil bagi dari perpangkatan dengan basis yang sama

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Contoh:

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

Perpangkatan pada pecahan

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Contoh:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$

Contoh 1 Pembagian pada Perpangkatan

1. $\frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2}$ Kurangkan pangkat basis 4

   $= 4$ Sederhanakan

2. $\frac{(-4)^7}{(-4)^2} = (-4)^{7-2}$ Kurangkan pangkat basis (-4)

   $= (-4)^5$ Sederhanakan

3. $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2}$ Kurangkan pangkat basis x

   $= x^3$ Sederhanakan

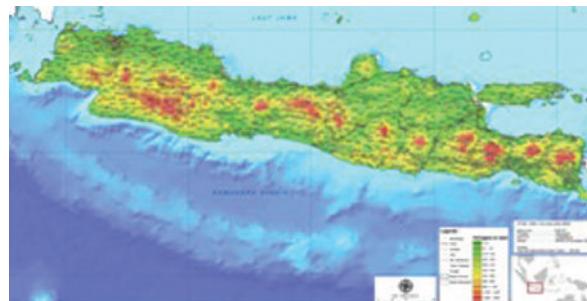
Contoh 2 Menyederhanakan Operasi pada Perpangkatan

Sederhanakan bentuk $\frac{4^3 \times 4^8}{4^5}$. Tuliskan jawaban dalam perpangkatan.

$\frac{4^3 \times 4^8}{4^5} = \frac{4^{3+8}}{4^5}$ Jumlahkan pangkat dari pembilang

$= \frac{4^{11}}{4^5}$ Sederhanakan

$= 4^{11-5}$ Kurangkan pangkat dari basis 4

$= 4^6$ Sederhanakan

Contoh 3 **Operasi Perkalian dan Pembagian pada Perpangkatan**

Sederhanakan bentuk $\frac{b^4}{b^2} \times \frac{b^6}{b^3}$. Tuliskan jawaban dalam perpangkatan.

$\frac{b^4}{b^2} \times \frac{b^6}{b^3}$	$= b^{4-2} \times b^{6-3}$	Kurangkan pangkat
	$= b^2 \times b^3$	Sederhanakan
	$= b^{2+3}$	Jumlahkan pangkat
	$= b^5$	Sederhanakan

Contoh 4 **Penerapan Pembagian pada Perpangkatan dalam Kehidupan Nyata**

Berdasarkan data BPS tahun 2010 (www.bps.go.id), jumlah penduduk pulau Jawa mencapai 130 juta jiwa (melalui proses pembulatan). Sedangkan luas pulau Jawa $1,3 \times 10^5$ km^2. Berapakah kepadatan penduduk pulau Jawa tahun 2010?

Sumber: www. geospasial.bnpb.go.id

Gambar 1.11 Peta Pulau Jawa

Penyelesaian:

Diketahui: jumlah penduduk Jawa = 130 juta jiwa = 130.000.000 = $1,3 \times 10^8$ jiwa

Luas Pulau Jawa = $1,3 \times 10^5$ km^2

Kepadatan penduduk $= \frac{\text{Jumlah penduduk}}{\text{Luas area}}$

	$= \frac{1,3 \times 10^8}{1,3 \times 10^5}$	Subtitusikan populasi penduduk dan luas area
	$= \frac{1,3}{1,3} \times \frac{10^8}{10^5}$	Tulis kembali dalam bentuk pembagian terpisah
	$= 1 \times 10^{8-5}$	Kurangkan pangkat
1.000	$= 1 \times 10^3$	Sederhanakan

Jadi, kepadatan penduduk pulau Jawa tahun 2010 yaitu 1.000 jiwa/km^2

1. Sederhanakan perpangkatan berikut.

   a. $\dfrac{8^4}{8^1}$ b. $\dfrac{2,3^7}{2,3^3}$ c. $\dfrac{(-8)^9}{(-8)^3}$

2. Sederhanakan perpangkatan berikut.

   a. $\dfrac{8^4 \times 8^2}{8^3}$ b. $\dfrac{(-2,3)^{10}}{(-2,3)^3 \times (-2,3)^2}$ c. $\dfrac{b^9}{b^3} \times \dfrac{b^7}{b^4}$

3. Sederhakan bentuk berikut ini $\dfrac{6^3 \times 3^5}{2^3}$.

4. Pada Contoh 4, jika populasi penduduk pulau Jawa bertambah 1% setiap 10 tahun, hitung kepadatan penduduk pulau Jawa pada tahun 2020 dan 2030.

Latihan 1.3 Pembagian pada Perpangkatan

1. Sederhanakan perpangkatan berikut ini.

   a. $\dfrac{(-4)^5}{(-4)^2}$ f. $\dfrac{5^5}{5^2 \times 5^3}$

   b. $\dfrac{(-4)^6}{(-4)^2}$ g. $\dfrac{2^7 \times 6^7}{4^7}$

   c. $\dfrac{0,3^7}{0,3^3}$ h. $\dfrac{6^7 \times 3^3}{2^7}$

   d. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^9}{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$ i. $\dfrac{10^6 \times 4^2}{25^3 \times 8^3}$

   e. $\dfrac{3^7 \times 3^2}{3^3}$ j. $\dfrac{21^5}{9^2} : \left(\dfrac{7}{2}\right)^2$

2. Sederhanakan bentuk aljabar berikut ini.

a. $\dfrac{(-y)^5}{(-y)^2}$

d. $\dfrac{42y^8}{12y^5}$

b. $\dfrac{\left(\frac{1}{t}\right)^7}{\left(\frac{1}{t}\right)^3}$

e. $\dfrac{\left(\frac{1}{t}\right)^7}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} \times \dfrac{\left(\frac{1}{t}\right)^3}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}$

c. $\dfrac{3m^7}{m^3}$

f. $\dfrac{3w^4}{w^2} \times 5w^3$

3. Sederhanakan.

a. $\dfrac{0,2^4 \times 0,2^2}{0,2^5}$

d. $\dfrac{3 \times 5^4}{5^3} - 15$

b. $\dfrac{-5^5}{(-5)^2 \times (-5)^2}$

e. $\dfrac{4^5}{4^4} - \dfrac{2^4}{2^3} \times 6$

c. $12 + \dfrac{4^7}{4^6}$

4. Tuliskan kembali perpangkatan berikut dalam tiga bentuk pembagian perpangkatan yang berbeda.

a. 2^5

b. p^3

5. Dapatkan nilai n dari pembagian pada perpangkatan di bawah ini.

a. $\dfrac{s^2}{s^4} \times \dfrac{s^9}{s^3} = s^n$

b. $\dfrac{3^6}{3^2} = n \times 9$

6. **Berpikir Kritis**. Diberikan persamaan $\dfrac{5^m}{5^n} = 5^4$.

   a. Tentukan dua bilangan m dan n yang bernilai dari 1 sampai dengan 9 sehingga dapat memenuhi persamaan di atas.

   b. Tentukan banyak penyelesaian dari persamaan tersebut. Jelaskan jawabanmu.

7. Bilangan $\dfrac{2^{2.015} + 2^{2.014} + 2^{2.013}}{14}$ setara dengan 2^y, untuk y suatu bilangan bulat positif. Tentukan nilai y.

8. Populasi bakteri yang tersebar dalam suatu wadah berbentuk persegi panjang yaitu sebanyak $4{,}2 \times 10^7$. Jika panjang dan lebar wadah tersebut masing-masing 10 cm dan 7 cm, berapa kepadatan bakteri pada wadah tersebut?

9. **Analisis Kesalahan**. Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam menyederhanakan bentuk di bawah ini.

$$\frac{7^{13}}{7^5} = 7^{\frac{13}{5}} = 7^8$$

10.

Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 1.12 Pesawat

Tantangan. Intensitas bunyi percakapan manusia 10^6 kali intensitas suara manusia berbisik. Sedangkan intensitas bunyi pesawat lepas landas 10^{14} kali intensitas suara bisikan manusia. Berapa kali intensitas bunyi pesawat lepas landas dibandingkan dengan bunyi percakapan manusia?

1.4 Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar

Bagaimana kamu mendefinisikan bilangan real tak nol berpangkat nol dan berpangkat bulat negatif? Bagaimana hubungan bilangan pangkat dengan bentuk akar?

Kegiatan 1 Bilangan Real Tak Nol Pangkat Nol

Perhatikan notasi berikut ini.

$5.749 = 5.000 + 700 + 40 + 9$

$= 5 \times 1.000 + 7 \times 100 + 4 \times 10 + 9 \times 1$

ribuan ratusan puluhan satuan

$5.749 = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^{\cdots}$

- Pola apakah yang kamu dapat dari tiga bilangan berpangkat pertama? Lanjutkan pola untuk mendapatkan pangkat yang terakhir.
- Tuliskan kesimpulan yang kamu peroleh.

Salin dan lengkapi tabel di bawah ini

Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.

Gunakan Sifat Operasi Pembagian pada Perpangkatan	Hitung Hasil Operasinya	Kesimpulan
$\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$	$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{32}{32} = 1$	$2^0 = 1$
$\frac{4^4}{4^4} =$		
$\frac{5^3}{5^3} =$		
$\frac{(-3)^2}{(-3)^2} =$		
$\frac{(-2)^3}{(-2)^3} =$		

- Periksalah setiap hasil pada kolom pertama dan kolom kedua. Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh?
- Gunakan hasil di atas untuk mendefinisikan a^0 untuk a bilangan tak nol.

Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.

Salin dan lengkapi tabel di bawah ini.

Suatu Bilangan Dikalikan 1 Sama dengan Bilangan Itu Sendiri	Gunakan Sifat Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Kesimpulan
$5^3 \times 1 = 5^3$	$5^3 \times 5^0 = 5^3 \times 1 = 5^3$	$5^0 = 1$
$... \times 4^2 = 4^2$	$4^0 \times 4^2 = . . .$	
$(-2)^3 \times ... = (-2)^3$	$(-2)^3 \times (-2)^0 = . . .$	
$(-3)^2 \times ... = (-3)^2$	$(-3)^2 \times (-3)^0 = . . .$	
$\ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \ldots$	

Ayo Kita Menalar

- Periksalah setiap hasil pada kolom pertama dan kolom kedua. Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh?
- Gunakan hasil di atas untuk mendefinisikan a^0 untuk a bilangan real tak nol.

Setelah melakukan Kegiatan 1, tuliskan definisi nilai a (pangkat) 0 untuk a bilangan tak nol.

Untuk setiap a bilangan real tak nol, a^0 bernilai ....

Secara aljabar dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$a^0 = ...$ untuk a bilangan real dan $a \neq 0$.

Silakan bertanya kepada guru atau temanmu jika masih belum memahami konsep bilangan pangkat nol.

Kegiatan 2 Bilangan Real Tak Nol Pangkat Bulat Negatif

Ayo Kita Amati

Coba amati pola dan operasi perpangkatan berikut.
Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.

Bilangan	Gunakan Sifat Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2}=1:2=2^0:2^1=2^{0-1}=2^{-1}$	$\frac{1}{2^1}=2^{-1}$
$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}=1:2^2=2^0:2^2=2^{0-2}=2^{-2}$	$\frac{1}{2^2}=2^{-2}$
$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}=1:2^3=2^0:2^3=2^{0-3}=2^{-3}$	$\frac{1}{2^3}=2^{-3}$

Ayo Kita Mencoba

Salin dan lengkapi tabel di bawah ini

Bilangan	Gunakan Sifat Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$		
$\frac{1}{81}=\frac{1}{3^4}$		
$\frac{1}{216}=\frac{1}{6^3}$		

Coba amati pola dan operasi perpangkatan berikut.

Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.

Bilangan	Gunakan Sifat Perkalian atau Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
1.000	$1.000 = 10^1 \times 10^1 \times 10^1 = 10^{1+1+1} = 10^3$	$1.000 = 10^3$
100	$100 = 10^1 \times 10^1 = 10^{1+1} = 10^2$	$100 = 10^2$
10	$10 = 10^1$	$10 = 10^1$
1	$1 = 10^0$	$1 = 10^0$
$\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10} = 1:10 = 10^0 : 10^1 = 10^{0-1} = 10^{-1}$	$\frac{1}{10^1} = 10^{-1}$
$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{100} = 1:100 = 10^0 : 10^2 = 10^{0-2} = 10^{-2}$	$\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

Berdasarkan pengamatan dan diskusi di atas, lengkapilah tabel di bawah ini.

Bilangan	Gunakan Sifat Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
$\frac{1}{1.000} = \frac{1}{10^3}$		
$\frac{1}{10.000} = \frac{1}{10^4}$		
$\frac{1}{100.000} = \frac{1}{10^5}$		

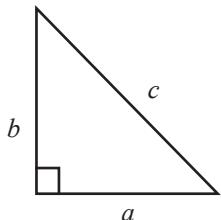
- Periksalah setiap hasil kolom pertama dan kolom kedua pada tabel-tabel di atas. Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh?
- Gunakan hasil di atas untuk mendefinisikan a^{-n} untuk a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat.

Setelah melakukan Kegiatan 2, tuliskan definisi nilai a^{-n} untuk a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat.

Untuk setiap a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat, berlaku:

$a^{-n} = \frac{1}{a^{\cdots}}$ untuk $a \neq 0$, a bilangan real dan n bilangan bulat

Berikut istilah dalam perpangkatan 10 yang sering digunakan.
Lengkapi tabel di bawah ini.

Istilah	Bilangan yang Direpresentasikan	Perpangkatan 10	Istilah	Bilangan yang Direpresentasikan	Perpangkatan 10
Kilo	1.000	10^3	Mili	0,001	10^{-3}
Mega	1.000.000		Mikro	0,000001	
Giga	1.000.000.000		Nano	0,000000001	
Tera	1.000.000.000.000		Pico	0,000000000001	

Kegiatan 3 Bentuk Akar

Ayo Kita Amati

Ingat kembali materi tentang Teorema Pythagoras yang sudah kalian pelajari di kelas VIII. Perhatikan dengan seksama langkah-langkah aturan Pythagoras berikut ini.

$c^2 = a^2 + b^2$ Rumus umum Teorema Pythagoras

$\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ Akarkan kedua ruas untuk mendapatkan panjang sisi miring segita siku-siku

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Didapatkan persamaan umum untuk mencari panjang sisi miring segitiga siku-siku

Ayo Kita Menanya

Amati proses mendapatkan panjang sisi miring pada segitiga siku-siku dengan menerapkan aturan pythagoras pada kegiatan di atas. Buatlah pertanyaan yang menyatakan hubungan antara pangkat kuadrat dan akar kuadrat.

Ayo Kita Amati

1. Mendapatkan akar kuadrat dari suatu bilangan

Aira mempunyai selembar kain berbentuk persegi dengan luas 14.400 cm^2 untuk membuat taplak meja. Untuk mempercantik taplak, Aira akan menambahkan renda di sekeliling taplak. Berapa meter panjang minimal renda yang diperlukan?

Untuk membantu Aira, kita harus mengetahui panjang sisi persegi agar kita dapat menghitung keliling taplak meja tersebut.

Misal panjang sisi kain adalah a cm, maka luas kain tersebut adalah

$a \times a = a^2 = 14.400$

sehingga,

$a = \sqrt{14.400}$ $\sqrt{14.400}$ dibaca *"akar kuadrat dari 14.400"*.

$a = 120$ diskusikan bagaimana mendapatkannya?

$a = 120$ karena $120 \times 120 = 14.400$ atau $120^2 = 14.400$.

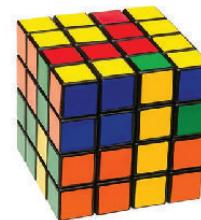
Dengan demikian Aira harus menyediakan renda dengan panjang

$4 \times a = 4 \times 120 = 480$.

Jadi, panjang minimal renda yang diperlukan adalah 480 cm atau 4,8 m.

Buatlah pertanyaan berkaitan dengan cara mencari akar dari suatu bilangan.

a. Diskusikan dengan temanmu cara memperkirakan nilai dari $\sqrt{5}, \sqrt{7}$, dan $\sqrt{200}$.

b. Apakah –6 juga merupakan nilai dari $\sqrt{36}$?

Ingat:

Akar Kuadrat	Jika a tidak negatif, $\sqrt{a}$ adalah bilangan tidak negatif yang kuadratnya adalah a

Jadi, meskipun $(-6) \times (-6) = 36$, nilai dari $\sqrt{36} \neq -6$, tetapi $\sqrt{36} = 6$, karena nilai akar dari suatu bilangan positif selalu positif.

2. Mendapatkan Akar Pangkat *n* dari Suatu Bilangan

Pada persoalan mencari rusuk suatu kubus bila volume diketahui, maka kita akan berhadapan dengan bentuk akar pangkat tiga. Misalkan diketahui volume suatu kubus adalah 64 cm^3, berapakah panjang rusuk kubus tersebut?

Sumber: www.toysrus.com
Gambar 1.13 Rubik ukuran $4 \times 4 \times 4$

Misal panjang rusuk tersebut adalah k, maka volume kubus adalah

$V = k^3 \Leftrightarrow 64 = k^3 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{64}$

Bagaimanakah kita memperoleh k?

Ingat bahwa, $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$, dengan demikian $\sqrt[3]{64} = 4$

Jadi, panjang rusuk kubus tersebut adalah 4 cm.

Perhatikan juga contoh berikut ini.

$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$ sehingga $\sqrt[5]{-32} = -2$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, sehingga $\sqrt[4]{81} = 3$

$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$, apakah $\sqrt[4]{81} = -3$? Jelaskan.

Ingat:

Akar Pangkat n	1. Jika a tidak negatif, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$ dan b tidak negatif. 2. Jika a negatif dan n ganjil, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$.

3. Menyederhanakan perkalian bentuk akar

Jika a dan b bilangan positif, maka berlaku:

1. $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}$
2. $b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b - c)\sqrt{a}$
3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka berlaku $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Amati dan lengkapi tabel berikut.

Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{8}$	$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
$\sqrt{45}$	$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
$\sqrt{0,25}$	$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = 0,5$

Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{108}$	
$\sqrt{147}$	
$\sqrt{200}$	
$\sqrt{14.400}$	
$\sqrt{0,0576}$	

Amati dan lengkapi pula tabel berikut.

Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{12}+\sqrt{27}$	$=\sqrt{4\times 3}+\sqrt{9\times 3}$ $=\sqrt{4}\times\sqrt{3}+\sqrt{9}\times\sqrt{3}$ $=2\times\sqrt{3}+3\times\sqrt{3}$ $=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ $=(2+3)\sqrt{3}$ $=5\sqrt{3}$
$\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$	$=\sqrt{4\times 2}+\sqrt{9\times 2}-\sqrt{16\times 2}$ $=\sqrt{4}\times\sqrt{2}+\sqrt{9}\times\sqrt{2}-\sqrt{16}\times\sqrt{2}$ $=2\times\sqrt{2}+3\times\sqrt{2}-4\times\sqrt{2}$ $=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$ $=(2+3-4)\sqrt{2}$ $=\sqrt{2}$

Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{20}+\sqrt{45}$	
$\sqrt{48}+\sqrt{108}-\sqrt{27}$	

Ayo Silakan Bertanya

Ajukan pertanyaan kepada guru atau temanmu berkaitan dengan pangkat nol, pangkat negatif, dan bentuk akar.

Materi perpangkatan dan bentuk akar akan dipelajari kembali lebih detail di SMA.

Ayo Kita Berbagi

Jika kamu sudah memahami apa yang telah kamu pelajari di subbab ini, buatlah rangkuman berdasarkan hasil yang kamu peroleh dari Kegiatan 1 sampai dengan Kegiatan 3 di atas. Bantulah menjelaskan kepada temanmu yang masih kesulitan memahaminya.

Materi Esensi 1.4 Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar

PANGKAT NOL

Untuk setiap a bilangan real tak nol, a^0 bernilai 1

Secara aljabar dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$a^0 = 1 \text{ untuk } a \text{ bilangan real dan } a \neq 0$$

PANGKAT NEGATIF

Untuk setiap a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat, berlaku:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{untuk } a \neq 0,\ a \text{ bilangan real dan } n \text{ bilangan bulat}$$

BENTUK AKAR

$\sqrt{a}$ dibaca "akar kuadrat dari *a*"

Jika a tidak negatif, $\sqrt{a}$ adalah bilangan tidak negatif di mana $(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt[n]{a}$ dibaca "akar pangkat *n* dari *a*"

1. Jika *a* tidak negatif, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$ dan *b* tidak negatif.
2. Jika *a* negatif dan *n* ganjil, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$.

Menyederhanakan perkalian bentuk akar

Jika *a* dan *b* bilangan positif, maka berlaku

1. $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b+c)\sqrt{a}$
2. $b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b-c)\sqrt{a}$
3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Jika *a* dan *b* bilangan positif, dan $b \neq 0$, maka jika *a* dan *b* bilangan positif, maka berlaku $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Contoh 1 **Pangkat Nol dan Pangkat Negatif**

1. Hitung nilai perpangkatan berikut ini.

a. $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ — Gunakan definisi pangkat negatif

$= \frac{1}{8}$ — Hitung hasil perpangkatannya

b. $(2,3)^{-3} \times (2,3)^3 = (2,3)^{-3+3}$ — Jumlahkan kedua pangkatnya

$= (2,3)^0$ — Sederhanakan

$= 1$ — Gunakan definisi bilangan tak nol pangkat nol

c. $\frac{(-4)^6}{(-4)^8} = (-4)^{6-8}$ — Kurangkan kedua pangkat

$= (-4)^{-2}$ — Sederhanakan

$= \frac{1}{(-4)^2}$ — Gunakan definisi pangkat negatif

$= \frac{1}{16}$ — Hitung hasil perpangkatannya

2. Jika $y \neq 0$ dan $t \neq 0$, sederhanakan perpangkatan berikut.

a. $-2 \times y^0 = -2 \times 1$ — Gunakan definisi pangkat negatif

$= -2$ — Menghitung hasil perpangkatan

b. $\frac{4 \times t^3}{t^5} = 4 \times t^{3-5}$ — Kurangkan pangkat pembilang dan penyebut

$= 4 \times t^{-2}$ — Sederhanakan

$= \frac{4}{t^2}$ — Gunakan definisi pangkat negatif

Contoh 2 Air Terbuang Sia-sia

Sumber: www.hadisetyo.com
Gambar 1.14 Kran air

Air menetes sia-sia dari suatu kran air karena tidak ditutup dengan benar. Jika air menetes sebanyak 10^{-3} liter per detik, berapa air yang terbuang selama 10 jam?

Alternatif Penyelesaian:

Konversi waktu 1 jam menjadi detik.

$$1 \text{ jam} \times \frac{60 \text{ menit}}{1 \text{ jam}} \times \frac{60 \text{ detik}}{1 \text{ menit}} = 3.600 \text{ detik}$$

Air yang terbuang sia-sia selama 1 jam:

$$3.600 \text{ detik} \times 10^{-3} \frac{\text{liter}}{\text{detik}} = 3.600 \times \frac{1}{10^3} \text{ liter} \quad \text{(gunakan definisi pangkat negatif)}$$

$$= 3.600 \times \frac{1}{1.000} \text{ liter} \quad \text{(hitung nilai perpangkatan)}$$

$$= 3{,}6 \text{ liter}$$

Air yang terbuang sia-sia selama 10 jam adalah 3,6 liter × 10 = 36 liter.

Jadi, selama 10 jam air yang terbuang sia-sia sebanyak 36 liter.

***Catatan:** Biasakanlah hemat air

Contoh 3 Bentuk Akar

1. Sederhanakan bentuk akar berikut.

a. $\sqrt{75}$

b. $\sqrt{500}$

c. $\sqrt{0{,}000081}$

d. $7\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{192}$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b. $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 10 \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

c. $\sqrt{0,000081} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{1.000.000}} = \dfrac{9}{1.000} = 0,009$

d. $$\begin{aligned} 7\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{192} &= 7\sqrt{3} + \sqrt{16 \times 3} - \sqrt{64 \times 3} \\ &= 7\sqrt{3} + \sqrt{16} \times \sqrt{3} - \sqrt{64} \times \sqrt{3} \\ &= 7\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Contoh 4 Jarak Pandang Pesawat

Jarak pandang pesawat terbang selama terbang pada kondisi normal dinyatakan dengan $d = 1,5\sqrt{h}$, di mana d adalah jarak pandang dalam meter dan h adalah ketinggian pesawat dalam meter. Jika pengamat berada dalam pesawat yang terbang pada ketinggian 3.600 meter, berapa jarak yang dapat dilihat olehnya?

Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 1.15 Pesawat

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui:

ketinggian pesawat = h = 3.600 *meter*

jarak pandang pesawat = $d = 1,5\sqrt{h} = 1,5\sqrt{3.600} = 1,5 \times 60 = 90$

Jadi, pada ketinggian 3.600 *meter* jarak pandang pesawat yaitu 90 *meter*.

1. Tuliskan hasil dari bentuk pangkat berikut ini.

   a. $\dfrac{3z^3}{z^5}$

   b. $(0,5)^{-3} \times (0,5)^0$

   c. $\dfrac{4x^{-2}}{x^{-3}}$

2. Sederhanakan bentuk pangkat berikut.

a. $\dfrac{2^3}{2^5}$

b. $(0,5)^{-3}$

c. $\dfrac{(-4)^3}{(-4)^3}$

d. $\dfrac{1}{3^5} \times \dfrac{1}{3^{-4}}$

e. $\dfrac{2^4 \times 2^{-2}}{2^5}$

f. $3 : \dfrac{3^3 \times 3^2}{3^5}$

3. Sederhanakan bentuk akar berikut.

a. $\sqrt{125}$

b. $\sqrt{600}$

c. $\sqrt{0,0000256}$

d. $5\sqrt{3} + \sqrt{243} - \sqrt{12}$

Latihan 1.4

Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar

1. **Berpikir Kritis**. Bagaimana kamu dapat menuliskan angka 1 sebagai bentuk perpangkatan dengan basis 5 dan perpangkatan dengan basis 7?

2. Tentukan hasil operasi bilangan berpangkat berikut ini.

a. $3^1 + 3^0$

b. $(-2)^{-6}$

c. $(-3^3) \times (-3^0)$

d. $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-3}$

e. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

3. Tentukan hasil operasi bilangan berpangkat berikut ini.

a. $\dfrac{2^3 \times 2^4}{2^6}$

b. $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-4} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{0} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{4}$

c. $\dfrac{1}{3^5} \times \dfrac{1}{3^{-7}}$

d. $(-7)^4 \times 7^3$

4. Sederhanakan dalam bentuk pangkat negatif.

   a. $\dfrac{abc}{a^3bc^4}$

   b. $\dfrac{5^5}{5^2}$

   c. $\dfrac{b^5}{b^{-3}}$

   d. $r^6 \times r^{-6}$

5. Sederhanakan dalam bentuk pangkat positif.

   a. $2m^{-4} \times m^{-3}$

   b. $\dfrac{6^7}{6^3}$

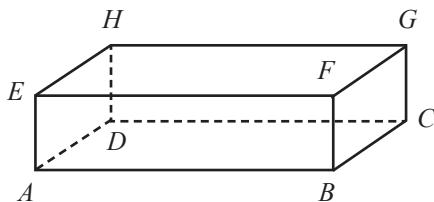
   c. $\dfrac{b^{-6}}{b^{-3}}$

   d. $\dfrac{1}{a^3bc^{-4}}$

6. Sederhanakan bentuk operasi perpangkatan berikut ini.

   a. $18t^3 \times 2t^{-3}$

   b. $\dfrac{2y^0t^3}{y^6t^{-2}}$

   c. $2m^0 \times m^{-7}$

   d. $m^3 + \dfrac{4}{m^{-3}}$

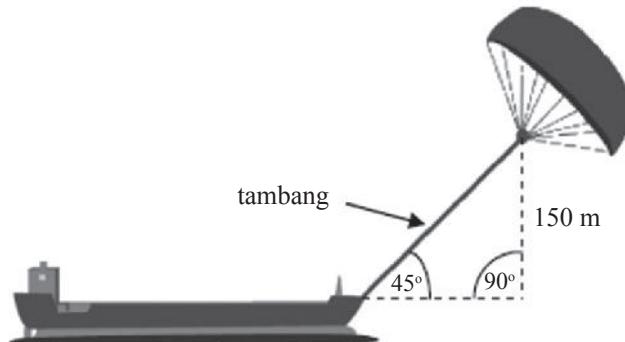
7. **Analisis Kesalahan**. Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam penyederhanaan berikut ini.

   $d^{-5} = (-d) \times (-d) \times (-d) \times (-d) \times (-d)$

   $= (-d)^5$

8. Tentukan panjang diagonal ruang balok di bawah ini dengan panjang rusuk AB = 12 cm, BC = 5 cm, dan CG = 4 cm.

9. **Tantangan**. Pada sebuah pabrik kertas HVS dilakukan pengemasan kertas per rim (1 rim = 500 lembar). Jumlah pesanan yang harus dipenuhi pabrik tersebut tiap harinya adalah 30 karton box dengan masing-masing karton box berisi 30 rim kertas. Berapakah rim kertas HVS yang harus diproduksi dalam 1 bulan? (1 bulan adalah 30 hari)

Sumber: www.tempo.co.id
Gambar 1.16 Pengemasan kertas

10. **Tantangan**. Setiap tanggal 10 Budi melakukan aktivasi paket internet murah dengan kapasitas 1 Gigabyte (GB) untuk telepon selularnya dan masa aktif berlaku sampai tanggal 10 pada bulan berikutnya. Jika Budi melakukan aktivasi pada tanggal 10 Agustus 2016, berapakah kapasitas rata-rata tiap hari yang digunakan Budi agar tetap dapat menggunakan paket internet hingga 9 September 2016? (Tuliskan jawaban kamu dalam satuan *Megabyte*)

11. **Tantangan**. Pada soal nomor 9, andaikan paket internet Budi habis pada tanggal 30 Agustus 2016, berapa rata-rata kapasitas yang digunakan Budi tiap harinya? (Tuliskan jawaban kamu dalam satuan *Byte*)

12. Setiap kantung darah yang didonasikan oleh para pendonor kepada Palang Merah Indonesia (PMI) berisi 0,5 L darah. (1 $mm^3 = 10^{-3}$ mL)
    a. Jika dalam setiap 1 mm^3 darah mengandung 3×10^4 sel darah putih, berapa jumlah sel darah putih dalam satu kantung darah tersebut? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.
    b. Jika dalam setiap 1 mm^3 darah mengandung 7×10^6 sel darah merah, berapa jumlah sel darah merah dalam satu kantung darah tersebut? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.

13. Sederhanakan bentuk akar berikut.

    a. $\sqrt{112}$

    b. $\sqrt{216}$

    c. $\sqrt{605}$

    d. $\sqrt{800}$

    e. $\sqrt{5.000}$

    f. $\sqrt{0,000121}$

    g. $\sqrt{0,00000324}$

    h. $9\sqrt{2} + \sqrt{72} - \sqrt{578}$

    i. $7\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{768}$

    j. $9\sqrt{5} - \sqrt{125} + \sqrt{720}$

14. Pak Asep memiliki sebuah kolam renang berbentuk silinder di belakang rumahnya. Diameter kolam tersebut adalah $14\sqrt{3}$ meter dengan kedalaman $150\sqrt{2}$ cm. Apabila Pak Asep ingin mengisi kolam tersebut sampai penuh, berapa liter air yang dibutuhkan oleh Pak Asep? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.

15. Sebuah kapal tenaga angin seperti gambar di bawah. Perkirakan panjang tali layar agar menarik kapal pada sudut 45^o dan ketinggian layar 150 m.
    (*Soal PISA 2012*)

1.5 Notasi Ilmiah (Bentuk Baku)

Bagaimana membaca dan menuliskan notasi ilmiah?

Kegiatan 1 Menggunakan Kalkulator

Lakukan dan diskusikan bersama temanmu.

1. Dengan menggunakan kalkulator, kalikan dua bilangan besar. Sebagai contoh 2 milyar dikalikan dengan 3 milyar

   $$2000.000.000 \times 3000.000.000$$

   Berapa nilai yang muncul di layar kalkulator?

   Kamu mungkin akan melihat bahwa hasilnya adalah 6.00000000e + 18

   Sumber: www.studentcalculators.co.uk
   Gambar 1.17 Kalkulator

   Bentuk 6.00000000e + 18 bisa dinyatakan dengan 6×10^{18} yang biasa disebut dengan notasi ilmiah (bentuk baku).
2. Tentukan hasil perkalian 40.000.000.000 dengan 600.000.000.000 tanpa menggunakan kalkulator. Berapa hasilnya?
3. Apa yang dapat kamu simpulkan dari hasil (1) dan (2)?
4. Ulangi lagi (1) sampai dengan (3) di atas, untuk bilangan besar 70.000.000.000.000 dikalikan dengan 30.000.000.000.000.

Setelah melakukan percobaan di atas, buatlah pertanyaan yang berkaitan dengan penulisan perpangkatan yang ditunjukkan kalkulator.

1. Kalikan dua bilangan yang sangat kecil dengan kalkulator, misalkan 0,000000002 dikalikan dengan 0,000000003. Bagaimana hasil yang ditunjukkan oleh kalkulatormu? Jelaskan.
2. Lakukan kembali dengan dua bilangan kecil lainnya.
3. Kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Bagaimana kamu dapat menuliskan sebuah bilangan dalam bentuk notasi ilmiah?

Kegiatan 2 Penulisan Notasi Ilmiah

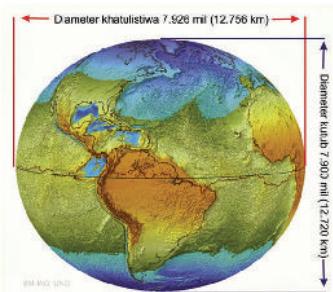
Berikut ini diberikan suatu besaran yang dituliskan dalam bentuk notasi ilmiah dan dalam bentuk bilangan biasa.

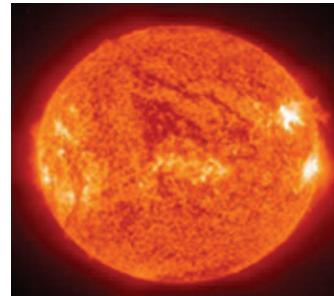
a. Mengubah bentuk notasi ilmiah menjadi bilangan biasa

Kisaran luas total daratan Indonesia adalah $1,92 \times 10^{12}$ m^2. Jika dituliskan dalam bentuk bilangan biasa menjadi

$= 1,92 \times 1.000.000.000.000$ m^2

$= 1.920.000.000.000$ m^2

Sumber: www.beautiful-indonesia.umm.ac.id
Gambar 1.18 Peta Indonesia

b. Kisaran diameter galaksi Bimasakti adalah $1,135 \times 10^{18}$. Tuliskan dalam bentuk bilangan biasa.

Sumber: www.guardianlv.com
Gambar 1.19 Galaksi Bima Sakti

c. Kisaran diameter bumi adalah $1{,}27 \times 10^7$ m. Tuliskan dalam bentuk bilangan biasa.

Sumber: www. smiagiung.blogspot.com
Gambar 1.20 Bumi

d. Kisaran diameter matahari adalah 1.390.000.000 m. Tuliskan dalam bentuk notasi ilmiah.

Sumber: www.greenpeace.org
Gambar 1.21 Matahari

e. Kisaran luas Samudera Pasifik adalah 180.000.000 km^2. Tuliskan dalam bentuk notasi ilmiah.

Sumber: www.wayantulus.com
Gambar 1.22 Samudera Pasifik

Setelah melakukan Kegiatan 1 dan 2, tuliskan kesimpulan mengenai penulisan notasi ilmiah (bentuk baku) suatu bilangan.

Materi Esensi 1.5 Notasi Ilmiah

Notasi ilmiah (bentuk baku) dari suatu bilangan positif dituliskan dalam bentuk

$a \times 10^n$ dengan ... $1 < a < 10$ ... dan n adalah bilangan bulat.

Misalkan notasi ilmiah untuk 2.300 adalah

nilai a lebih dari 1 dan kurang dari 10 → $2,3 \times 10^3$ ← nilai n bilangan bulat

Catatan:

Bilangan lebih atau sama dengan 10

Gunakan pangkat positif ketika kamu memindahkan titik desimal ke kiri.

Contoh:

$8.500.000 = 8,5 \times 1.000.000 = 8,5 \times 10^6$

$144.000.000 = 1,44 \times 100.000.000 = 1,44 \times 10^8$

Bilangan antara 0 dan 1

Gunakan pangkat negatif ketika kamu memindahkan titik desimal ke kanan.

Contoh:

$0,0000085 = 8,5 : 1.000.000 = 8,5 \times 10^{-6}$

$0,0000000144 = 1,44 : 100.000.000 = 1,44 \times 10^{-8}$

Contoh 1 Menulis Notasi Ilmiah Menjadi Bentuk Biasa

Nyatakan bentuk ilmiah berikut ini menjadi bentuk biasa.

a. $2,16 \times 10^5$

b. $0,16 \times 10^{-3}$

Penyelesaian:

a. $2,16 \times 10^5 = 2,16 \times 100.000$ — Dapatkan hasil dari perpangkatan 5 dengan basis 10

$= 216.000$ — Lakukan operasi perkalian dengan memindahkan tanda desimal sebanyak 5 tempat ke kanan

b. $0{,}16 \times 10^{-3} = 0{,}16 \times 0{,}001$ — Dapatkan hasil dari perpangkatan (–3) dengan basis 10

$= 0{,}00016$ — Lakukan perkalian dengan memindahkan tanda desimal sebanyak 3 tempat ke kiri

Contoh 2 — Menulis Notasi Ilmiah dari Suatu Bilangan

Nyatakan dalam bentuk ilmiah.

a. 155×10^{6}

b. $46{,}78 \times 10^{-3}$

c. 2.300.000

d. 0,0000695

Penyelesaian:

a. $155 \times 10^{6} = 1{,}55 \times 100 \times 10^{6} = 1{,}55 \times 10^{2} \times 10^{6} = 1{,}55 \times 10^{8}$

b. $46{,}78 \times 10^{-3} = 4{,}678 \times 10 \times 10^{-3} = 4{,}678 \times 10^{-2}$

c. $2.300.000 = 2{,}3 \times 1.000.000 = 2{,}3 \times 10^{6}$

d. $0{,}0000695 = 6{,}95 : 100.000 = 6{,}95 : 10^{5} = 6{,}95 \times 10^{-5}$

Ayo Kita Tinjau Ulang

Tuliskan bentuk baku dari bilangan berikut.

1. 12×10^{5}
2. 123×10^{-7}
3. 4567×10^{6}
4. 6.780.000
5. 78.000.000.000
6. 0,000678
7. 0,00000000078

Tuliskan bentuk bilangan biasa dari bilangan berikut.

8. 5.500
9. 79.999
10. 150.000.000
11. 9.876.000.000.000
12. 0,007777
13. –0,00000123
14. 0,0000000765

Latihan 1.5

Notasi Ilmiah (Bentuk Baku)

1. **Tantangan**. Hikmah membeli *flashdisk* berkapasitas 16 GB dengan kapasitas yang dapat digunakan 95%. Berapa *byte* kapasitas *flashdisk* yang bisa digunakan?

Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 1.23 Flashdisk

2. Tentukan jawaban kamu dalam bentuk baku. Beri penjelasan singkat bagaimana kamu mendapatkan jawaban tersebut.
   a. $10{,}5 \times 10^{3}$
   b. $1{,}5 \times 10^{-5}$
   c. 7.125×10^{-16}
   d. $0{,}455 \times 10^{-6}$
   e. 5×10^{12}

3. Tuliskan bilangan berikut dalam bentuk biasa.
   a. 7×10^{3}
   b. $2{,}7 \times 10^{-12}$
   c. $3{,}25 \times 10^{5}$
   d. $9{,}95 \times 10^{15}$
   e. $3{,}1 \times 10^{3}$

4. Tuliskan bilangan berikut dalam bentuk baku.
   a. 0,00000056
   b. 120.000.000.000
   c. 1.000.000.000.000.000
   d. 880
   e. 0,000123

5. Sederhanakan bilangan berikut dan tuliskan jawabanmu dalam bentuk baku.
   a. $(5 \times 10^{2}) \times (3 \times 10^{2})$
   b. $(7{,}2 \times 10^{-3}) \times (4 \times 10^{5})$
   c. $(5{,}25 \times 10^{6}) \times (10^{-12})$
   d. $\dfrac{(1{,}25 \times 10^{16})}{5 \times 10^{6}}$
   e. $\dfrac{1{,}6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{4}}$

6. **Analisis Kesalahan**. Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam penulisan bilangan bentuk baku berikut.

   a. $125.000.000 = 12,5 \times 10^7$

   b. $0,0000055 = 5,5 \times 10^6$

   c. $1,3 \times 10^{-4} = 13.000$

7. Massa planet Jupiter adalah $1,9 \times 10^{22}$ kg, sedangkan massa planet Bumi adalah 30% dari Jupiter. Berapakah massa planet Bumi? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk baku atau notasi ilmiah.

Sumber: www.teknologi.news.viva.co.id
Gambar 1.24 Planet Jupiter

8. Massa Bumi adalah 5.972.190.000.000.000.000.000 kg. Tuliskan dalam bentuk baku.

9. **Tantangan**. Lihatlah soal nomor 1. Berapakah kisaran harga memori yang dapat digunakan tiap *byte*? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk baku.

Sumber: www.tsumasaga.wordpress.com
Gambar 1.25 Planet Bumi

10. Budi sedang melakukan percobaan di laboratorium dengan menggunakan mikroskop. Mikroskop yang digunakan dapat mengamati suatu organisme menjadi 1.000 kali lebih besar dari ukuran sebenarnya. Bakteri yang diamati oleh Budi memiliki diameter dengan ukuran 5×10^{-5} milimeter. Berapa diameter bakteri yang terlihat pada mikroskop (dalam cm)? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk notasi ilmiah.

1. Seorang ayah memberikan sebuah tantangan kepada anaknya untuk menghitung jumlah uang koin yang diperlukan untuk memenuhi papan catur. Pada kotak pertama diberi 1 uang koin, kotak kedua 2 uang koin, 4 uang koin untuk kotak ketiga, 8 koin untuk kotak keempat demikian berlanjut sampai memenuhi 64 kotak.
   a. Bantu anak tersebut menentukan susunan banyak koin pada tiap-tiap kotak papan catur tersebut. Nyatakan dalam bentuk perpangkatan.
   b. Jika berat tiap-tiap uang koin adalah 16 gr, hitunglah berat uang koin pada tiap-tiap kotak. Nyatakan dalam bentuk perpangkatan.
   c. Susunlah penyelesaian nomor a dan b dalam satu tabel.
   d. Banyak uang yang harus dikeluarkan untuk memenuhi papan catur, jika uang koin yang digunakan adalah Rp200,00, berapa rupiah uang yang diperlukan untuk memenuhi semua kotak?

2. Gunakan akses internet untuk mendapatkan populasi penduduk di 5 negara dengan penduduk terpadat di dunia.
   a. Nyatakan jumlah tiap-tiap populasi penduduk tersebut dalam bentuk notasi ilmiah/bentuk baku.
   b. Carilah luas wilayah di negara tersebut. Selanjutnya hitunglah kepadatan penduduk tiap-tiap negara. Nyatakan jawabanmu dalam bentuk baku.
   c. Melalui cara yang sama, carilah informasi tentang pertumbuhan penduduk tiap tahunnya. Selanjutnya perkirakan jumlah penduduk 10 tahun ke depan di tiap-tiap negara tersebut.
   d. Dari informasi yang kamu dapatkan pada butir c, hitunglah kepadatan penduduk 10 tahun ke depan.

Uji Kompetensi 1 — Perpangkatan dan Bentuk Akar

1. Dapatkan hasil dari operasi perpangkatan berikut ini.

$$\frac{64^2 + 16^3}{4^5}$$

2. Dapatkan bentuk perpangkatan yang ekivalen dengan bilangan di bawah ini (Jawaban dapat lebih dari satu bentuk perpangkatan).

   a. $\sqrt[2]{8}$

   b. $\sqrt[3]{27}$

3. Diketahui $\frac{\left(x^{n-1}y^n\right)^3}{x^{2n}y^{6+n}}$ senilai dengan $x^a y^b$. Tentukan nilai $\frac{b}{a}$.

4. Sederhanakan operasi perpangkatan berikut ini.

   a. $y^3 \times (3y)^2$

   b. $\sqrt{b}2y^5 \times b^3 6y^2$

   c. $(tn^3)^4 \times 4t^3$

   d. $(2x^3) \times 3(x^2y^2)^3 \times 5y^4$

5. Tuliskan bilangan di bawah ini dalam notasi ilmiah.

   a. 0,00000056

   b. 2.500.000

   c. 0,98

   d. 10.000.000.000.000

6. Hitung hasil perpangkatan berikut ini. Tuliskan jawabanmu dalam notasi ilmiah.

   a. 12×2^3

   b. $7{,}27 \times 10^2 - 0{,}5 \times 10^3$

   c. $(8{,}32 \times 10^4) : (4 \times 10^{-6})$

   d. $3{,}7 \times 10^3 \times 5{,}2 \times 10^{-3}$

7. Diberikan $x = 24$ dan $y = 54$. Tentukan hasil operasi di bawah ini. Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan yang paling sederhana.

   a. $x \times y$

   b. $\frac{x}{y}$

8. Berapakah hasil operasi perpangkatan $492^5 - 246^5$?

9. Berapa banyak detik dalam kurun waktu 60.000 tahun? Tuliskan hasilnya dalam notasi ilmiah.

10. Tuliskan hasil operasi perpangkatan berikut ini.

    a. -8×2^6

    b. $5^4 \times 50$

    c. $\frac{16}{2^4}$

    d. $\frac{98}{7^3}$

11. **Tantangan**. Pada acara lomba 17 Agustusan di SMPN 1 Taman, diadakan lomba mengisi air dalam wadah berbentuk kerucut dengan melewati perjalanan sejauh 5 m. Pada pengambilan awal, tiap peserta mengisi setiap wadah secara penuh. Setiap meter yang ditempuh maka air akan berkurang sebanyak $\frac{1}{10}$ bagian. Berapakah air yang terkumpul dalam satu kali perjalanan? (ukuran wadah: diameter = 10 cm dengan tinggi 12 cm. $V_{kerucut} = \frac{1}{3}\pi r^2 t$).

Sumber: Dokumen Kemdikbud

12. Urutkan bilangan berikut ini, dari yang terbesar ke terkecil.

    a. 7

    b. 0,89

    c. $5{,}2 \times 10^3$

    d. $0{,}98 \times 10^4$

    e. 0,0045

    f. 1.000

13. Cahaya bergerak dengan kecepatan 3×10^8 m/detik. Berapa jauh cahaya bergerak dalam satu tahun? Tuliskan hasilnya dalam notasi ilmiah.

14. Tuliskan hasil perpangkatan berikut ini.

a. $\frac{1}{2}\left(6^3 - 4^2\right)$

b. $8 + 3 \times (-3)^4$

c. $(6^4 - 4^4) : 3$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{16}\right)^2$

15. Dapatkan nilai n dari persamaan berikut ini.

a. $3^n = 243$

b. $2^{n+1} = \frac{1}{16}$

c. $4^n = (-2)^0$

d. $48 : 3 = n^4$

16. Satu karung yang berisi beras memiliki massa 50 kg. Andaikan tiap-tiap butir beras yang terdapat dalam karung tersebut memiliki massa yang sama, yaitu $2{,}5 \times 10^{-2}$ gram. Berapakah banyak butir beras dalam karung tersebut? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.

17. Seluruh planet yang ada dalam tata surya melakukan gerakan revolusi mengelilingi matahari. Planet Neptunus memerlukan waktu sekitar $2{,}5 \times 10^2$ tahun untuk mengelilingi matahari dalam satu putaran penuh. Matahari memerlukan waktu selama $2{,}25 \times 10^8$ tahun untuk mengelilingi pusat Galaksi Bimasakti dalam satu putaran penuh. Berapa banyak revolusi yang dilakukan oleh Planet Neptunus dalam mengelilingi matahari ketika matahari menyelesaikan gerakan mengelilingi pusat Galaksi Bimasakti dalam satu putaran penuh?

18. Setiap jantung manusia rata-rata memompa sekitar 7×10^{-2} liter darah dalam setiap detak jantung. Dalam tiap menitnya, rata-rata jantung manusia berdetak 70 kali. Berapa liter darah yang dipompa oleh jantung manusia dalam waktu 1 tahun (1 tahun = 365 hari)? Tuliskan jawabanmu dalam notasi ilmiah, bulatkan sampai 2 tempat desimal.

19. Nyatakan pernyataan matematika berikut sebagai pernyataan Benar (B) atau Salah (S). Berikan alasanmu.

a. $\frac{6^3}{6^3} = 0$

b. $(2 \times 6)^5 = 2^5 \times 6^5$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{2^7}{5^{-7}}$

d. $4^3 \times 4^7 = 2^{20}$

20. Sederhanakan bentuk di bawah ini.

a. $\left(\dfrac{a^5b^3c^3}{4bc}\right)\times\left(\dfrac{8ac}{3bc^{-3}}\right)$

b. $2m^0 \times m^{\frac{2}{3}}$

c. $m^3 + \dfrac{4}{m^{-3}}$

21. Diberikan $x = 27$ dan $y = 63$. Tentukan hasil dari operasi di bawah ini. Tuliskan jawabanmu dalam bentuk bilangan berpangkat paling sederhana.

a. x^3y

b. $\dfrac{x}{\sqrt{y}}$

22. Tuliskan dalam bentuk pangkat paling sederhana.

a. $\dfrac{243}{20}$

b. $\dfrac{500}{9}$

c. $\dfrac{50}{625}$

d. $\dfrac{49}{686}$

23. Perhatikan tabel berikut ini.

Satuan Panjang	Panjang (dalam meter)
Kilometer	10^3
Hektometer	10^2
Dekameter	10^1
Meter	1
Desimeter	10^{-1}
Sentimeter	10^{-2}
Milimeter	10^{-3}
Mikrometer	10^{-6}
Nanometer	10^{-9}

Dengan menggunakan tabel di atas, isilah titik-titik di bawah ini (nyatakan dalam bentuk perpangkatan)

a. 1 hektometer = ... millimeter

b. 1 kilometer = ... sentimeter

c. 1 dekameter = ... mikrometer

d. 1 desimeter = ... nanometer

24. Perhatikan tabel unsur-unsur kimia beserta jari-jari atomnya berikut ini. Semua pengukuran dituliskan dalam satuan nanometer.

Nama Unsur	Jari-jari Atom
Magnesium	$1,44 \times 10^5$
Oksigen	$4,8 \times 10^4$
Pospor	$9,6 \times 10^4$
Kalsium	$1,92 \times 10^5$
Barium	$2,4 \times 10^5$

a. Apakah jari-jari atom Pospor lebih panjang daripada jari-jari atom Magnesium?

b. Unsur apa yang memiliki jari-jari atom terbesar dan terkecil?

c. Berapa kalikah panjang jari-jari atom Barium jika dibandingkan dengan jari-jari atom Oksigen?

d. Berapa kalikah panjang jari-jari atom Kalsium jika dibandingkan dengan jari-jari atom Pospor?

25. Misalkan diperoleh data bahwa rata-rata penduduk Indonesia menghasilkan 2,5 liter sampah per hari. Jika diasumsikan total penduduk Indonesia adalah 250 juta jiwa, berapa meter kubik sampah yang dihasilkan oleh seluruh penduduk Indonesia dalam kurun waktu 1 bulan (30 hari)? (1 liter = 1 dm^3)

Bab II

Persamaan dan Fungsi Kuadrat

Kata Kunci

- *Fungsi Kuadrat*
- *Akar Kuadrat*
- *Persamaan Kuadrat*

Kompetensi Dasar

3.2 *Menjelaskan persamaan kuadrat dan karakteristiknya berdasarkan akar-akarnya serta cara penyelesaiannya.*

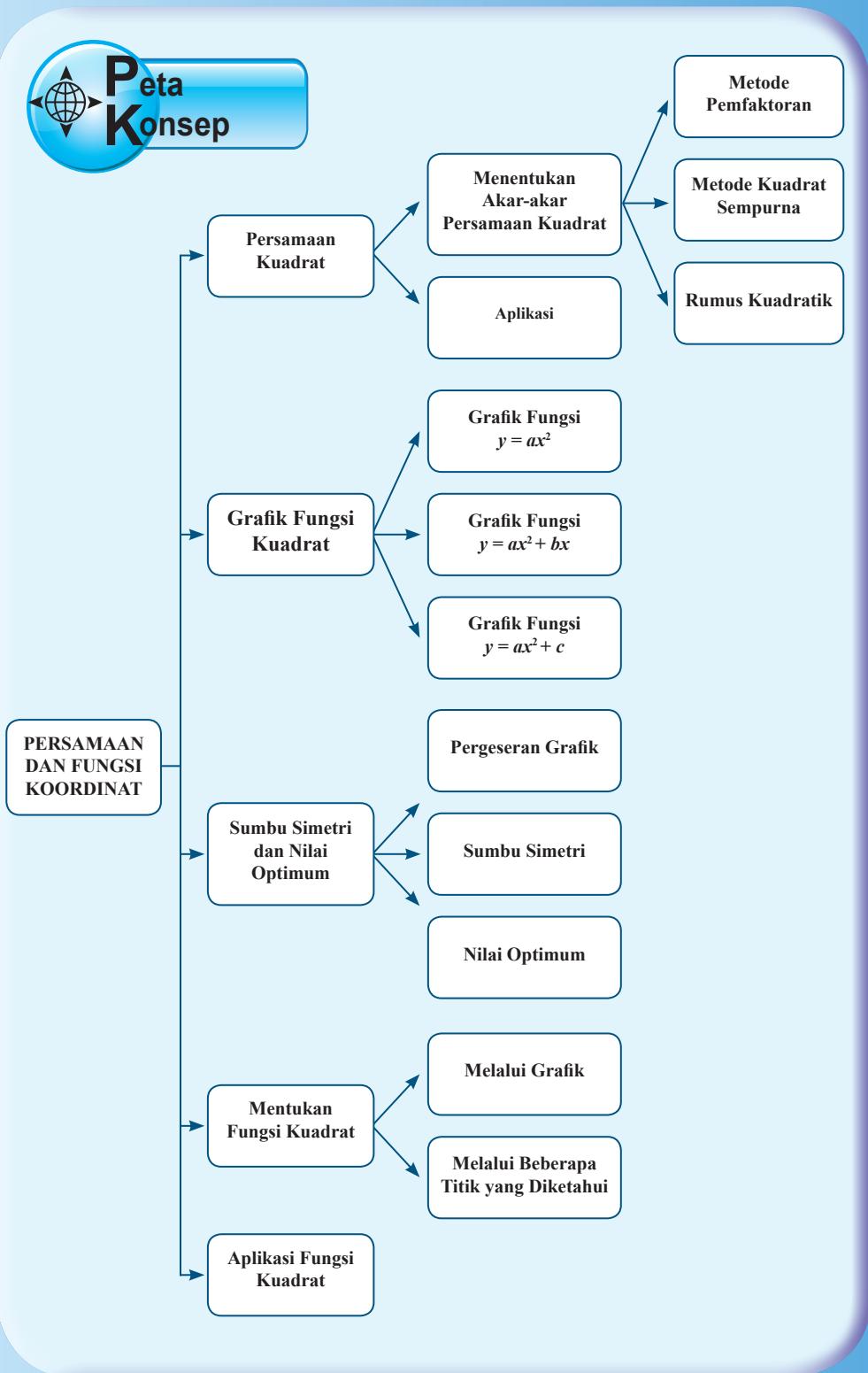
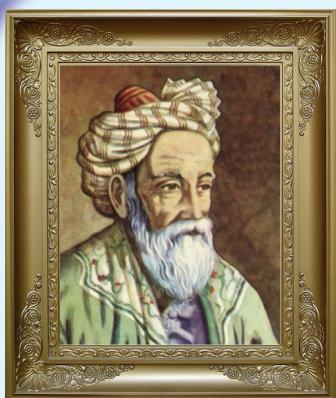
3.3 *Menjelaskan fungsi kuadrat dengan menggunakan tabel, persamaan, dan grafik.*

3.4 *Menjelaskan hubungan antara koefisien dan diskriminan fungsi kuadrat dengan grafiknya.*

4.2 *Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.*

4.3 *Menyajikan fungsi kuadrat menggunakan tabel, persamaan, dan grafik.*

4.4 *Menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual dengan menggunakan sifat-sifat fungsi kuadrat.*

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$. Grafik fungsi ini berbentuk parabola yang mempunyai nilai optimum. Dalam aplikasi dunia nyata ini sangat berguna.

Pengalaman Belajar

1. *Menyelesaikan persamaan kuadrat dan mengetahui karakteristik penyelesaiannya.*
2. *Menentukan grafik dari fungsi kuadrat.*
3. *Menentukan sumbu simetri dan nilai optimum.*
4. *Menentukan fungsi kuadrat.*
5. *Menjelaskan aplikasi dari fungsi kuadrat.*

Peta Konsep
PERSAMAAN DAN FUNGSI KOORDINAT
Persamaan Kuadrat
Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat
Metode Pemfaktoran
Metode Kuadrat Sempurna
Rumus Kuadratik
Aplikasi
Grafik Fungsi Kuadrat
Grafik Fungsi $y = ax^2$
Grafik Fungsi $y = ax^2 + bx$
Grafik Fungsi $y = ax^2 + c$
Sumbu Simetri dan Nilai Optimum
Pergeseran Grafik
Sumbu Simetri
Nilai Optimum
Mentukan Fungsi Kuadrat
Melalui Grafik
Melalui Beberapa Titik yang Diketahui
Aplikasi Fungsi Kuadrat

Sumber: http://blog.yovisto.com

Omar Khayyam

Omar Khayyam lahir 18 Mei 1048 di Nishapur di timur laut Iran. Pada usia muda ia pindah ke Samarkand dan memperoleh pendidikan di sana. Setelah itu ia pindah ke Bukhara dan berhasil menjadi matematikawan besar dan astronom dari periode abad pertengahan. Dia adalah penulis dari salah satu risalah yang paling penting pada aljabar dan ditulis sebelum zaman modern, Treatise on Demonstrasi Masalah Aljabar, yang mencakup metode geometris untuk memecahkan persamaan kubik dengan memotong sebuah hiperbola dengan lingkaran.

Omar Khayyam meneruskan tradisi aljabar al-Khawarizmi dengan memberikan persamaan sampai pangkat tiga. Seperti pendahulunya, Omar Khayyam melengkapi dengan persamaan kuadrat baik untuk solusi aritmatika maupun solusi geometri. Untuk persamaan-persamaan umum pangkat tiga dipercayainya bahwa solusi untuk aritmatika adalah tidak mungkin (kelak pada abad lima belas dibuktikan bahwa pernyataan ini salah), sehingga dia hanya memberi solusi geometri.

Gambar kerucut yang dipotong untuk menyelesaikan persamaan pangkat dua sudah pernah dipakai oleh Menaechmus, Archimedes, dan Alhazen. Namun, Omar Khayyam mengambil cara lebih elegan dengan melakukan generalisasi metode guna mencakup persamaan-persamaan pangkat tiga dengan hasil berupa akar bilangan positif. Untuk persamaan dengan pangkat lebih dari tiga, Omar Khayyam tidak dapat memberi gambaran dengan menggunakan metode geometri yang sama. Dianggap bahwa tidak ada dimensi lebih dari tiga, "Apa yang disebut dengan kuadrat dikuadratkan oleh para ahli aljabar, memberi daya tarik dari sisi teoritis."

Untuk lebih memudahkan uraian diberikan contoh persamaan: $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, kemudian, dengan teknik substitusi, mengganti, $x^2 = 2py$ akan diperoleh $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Hasilnya dari persamaan ini adalah hiperbola dan variabel untuk melakukan substitusi, $x^2 = 2py$, adalah parabola. Tampak jelas di sini bahwa hiperbola digambar bersama-sama dengan parabola pada (sistem) ordinat yang sama, sedangkan absis merupakan titik-titik perpotongan parabola dan hiperbola, adalah hasil akar persamaan kuadrat. Dia belum menjelaskan tentang koefisien negatif. Niatnya memecahkan problem berdasarkan parameter a, b, c adalah bilangan positif, negatif atau nol. Tidak semua akar dari persamaan kuadrat diketahui, karena dia tidak mengetahui akar bilangan negatif.

Sumber: http://sejarahmatematika1.blogspot.co.id, Wikipedia.

Hikmah yang bisa diambil

1. Kita harus terus berusaha untuk mencapai keberhasilan.
2. Kita harus mau dan mampu melakukan pembuktian-pembuktian tentang fenomena alam sekitar yang merupakan bukti kekuasaan Tuhan melalui keilmuan yang diketahui manusia.

2.1 Persamaan Kuadrat

Bagaimana menentukan akar persamaan kuadrat dengan memfaktorkan, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus kuadratik? Bagaimana karakteristik dari penyelesaian persamaan kuadrat berdasarkan koefisien-koefisiennya?

Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat menjumpai beberapa masalah yang terkait dengan persamaan kuadrat. Perhatikan masalah berikut.

"Johan dan Mario bekerja bersama-sama mengecat dinding dalam waktu 18 menit. Jika Johan bekerja sendirian, ia memerlukan waktu 15 menit lebih lama daripada waktu yang diperlukan Mario. Berapa waktu yang diperlukan Johan dan Mario masing-masing untuk mengecat dinding?"

Alternatif Penyelesaian:

Misal waktu yang diperlukan oleh Mario untuk mengecat dinding adalah t menit maka waktu yang diperlukan Johan adalah $t + 15$ menit. Sedangkan jika mereka melakukan bersama-sama maka waktu yang diperlukan adalah 18 menit. Sehingga didapatkan

Laju Mario mengecat adalah $\frac{1}{t}$.

Laju Johan mengecat adalah $\frac{1}{t+15}$.

Laju mengecat bersama-sama adalah $\frac{1}{18}$.

Dan pada akhirnya didapatkan:

Persamaan untuk menyelesaikan masalah ini adalah $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15} = \frac{1}{18}$.

Disederhanakan menjadi

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15}\right)(18t)(t+15) = \left(\frac{1}{18}\right).18t(t+15).$$

$$18t(t+15)\frac{1}{t} + 18t(t+15)\left(\frac{1}{t+15}\right) = t(t+15)$$

$$18(t + 15) + 18t = t(t + 15)$$
$$18t + 270 + 18t = t^2 + 15t$$
$$36t + 270 = t^2 + 15t$$
$$\mathbf{t^2 - 21t - 270 = 0}$$

Persamaan $t^2 - 21t - 270 = 0$ merupakan salah satu contoh persamaan kuadrat dan untuk menyelesaiakannya akan dibahas pada bagian ini. Secara umum persamaan kuadrat satu variabel adalah suatu persamaan yang pangkat tertingginya dua dan biasanya dituliskan sebagai $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ dengan $a \neq 0$ dan $a, b, c \in R$. Bilangan $\boldsymbol{a, b, c}$ pada persamaan kuadrat tersebut disebut sebagai **koefisien**.

Akar-akar atau penyelesaian dari $ax^2 + bx + c = 0$ adalah nilai x yang memenuhi persamaan tersebut.

Cara menentukan akar persamaan kuadrat ada tiga, yaitu:

(1) Memfaktorkan

(2) Melengkapi Kuadrat Sempurna

(3) Rumus Kuadratik (Rumus abc)

Untuk lebih jelasnya tentang akar persamaan kuadrat, ikutilah kegiatan belajar berikut.

Kegiatan 1 Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Salah satu cara untuk menentukan akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah dengan cara memfaktorkan. Sekarang coba kalian perhatikan kembali perkalian bentuk aljabar berikut.

Ayo Kita Gali Informasi

$x(x + 2) = x^2 + 2x$ atau $x^2 + 2x = x(x + 2)$	$(x + 1)(x + 4) = (x + 1)(x + 4)$ $= x^2 + 4x + x + 4$ $= x^2 + 5x + 4$ atau $(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$	$(3x - 4)(x + 3) = (3x - 4)(x + 3)$ $= 3x^2 + 9x - 4x - 12$ $= 3x^2 + 5x - 12$ atau $(3x - 4)(x + 3) = 3x^2 + 5x - 12$
Bagaimana, jika sebaliknya (dari kanan ke kiri)?		

$x^2 + 2x = x(x + 2)$	$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$	$3x^2 + 5x - 12 = (3x - 4)(x + 3)$
Bentuk seperti ini disebut dengan "Memfaktorkan"		

Dengan memfaktorkan persamaan kuadrat, dapat ditentukan akar-akarnya yaitu

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x + 1)(x + 4) = 0$

$x + 1 = 0$ atau $x + 4 = 0$

$x = -1$ atau $x = -4$

Jadi akar-akarnya adalah –1 dan –4.

Ayo Kita Amati

Tahap inti dari metode ini adalah memfaktorkan persamaan kuadrat $x^2 + bx + c$ menjadi $(x + p)(x + q)$ atau bisa dituliskan

$$x^2 + bx + \mathrm{c} = (x + p)(x + q)$$

$$x^2 + bx + \mathrm{c} = x^2 + (... + ...)x + (... \times ...)$$

Jadi, untuk memfaktorkan harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $b = ... + ...$ dan $c = ... \times ....$

Berdasarkan pengamatanmu, maka lakukan pemfaktoran berikut dan tentukan akar-akarnya.

- Persamaan kuadrat : $x^2 + 5x + 6 = 0$

  Didapat $b = 5$ dan $c = 6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $p + q = 5$ dan $pq = 6$. Dalam hal ini dilihat syarat $pq = 6$ terlebih dahulu, sehingga pasangan nilai p dan q yang mungkin adalah

p	q	pq	$p + q$
1	6	6	7
2	3	6	5
3	...	6	...
6	...	6	...
–1	...	6	...
–2	...	6	...
–3	...	6	...
–6	...	6	...

Kemudian karena juga harus memenuhi $p + q = 5$, maka berdasarkan tabel pada baris kedua didapat $p = ...$ dan $q = ...$ atau berdasarkan pada baris ketiga dituliskan $p = ...$ dan $q = ...$ (dua hasil ini merupakan hasil yang sama). Sehingga didapat pemfaktorannya

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Dengan demikian akar-akarnya adalah $x = ...$ dan $x = ...$

- Persamaan kuadrat : $x^2 + x - 6 = 0$

  Didapat $b = 1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $p + q = 1$ dan $pq = -6$. Dalam hal ini dilihat syarat $pq = -6$ terlebih dahulu, sehingga pasangan nilai p dan q yang mungkin adalah:

p	q	pq	$p + q$
1	...	–6	...
2	...	–6	...
3	...	–6	...
6	...	–6	...
–1	...	–6	...
–2	...	–6	...
–3	...	–6	...
–6	...	–6	...

Kemudian karena juga harus memenuhi $p + q = 1$, maka berdasarkan tabel di atas pada baris ketiga didapat $p = ...$ dan $q = ...$ atau berdasarkan pada baris keenam dituliskan $p = ...$ dan $q = ...$ (dua hasil ini merupakan hasil yang sama). Sehingga didapat pemfaktorannya

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

Dengan demikian, akar-akarnya adalah $x = ...$ dan $x = ...$

- Persamaan kuadrat : $x^2 - x - 6 = 0$

  Didapat $b = -1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $p + q = -1$ dan $pq = -6$. Dalam hal ini dilihat syarat $pq = -6$ terlebih dahulu, sehingga pasangan nilai p dan q yang mungkin adalah

p	q	pq	$p + q$
1	...	–6	...
2	...	–6	...
3	...	–6	...
6	...	–6	...
–1	...	–6	...
–2	...	–6	...
–3	...	–6	...
–6	...	–6	...

Kemudian karena juga harus memenuhi $p + q = -1$, maka berdasarkan tabel tersebut pada baris kedua didapat $p = ...$ dan $q = ...$ atau berdasarkan pada baris ketujuh dituliskan $p = ...$ dan $q = ...$ (dua hasil ini merupakan hasil yang sama). Sehingga didapat pemfaktorannya

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

Dengan demikian, akar-akarnya adalah $x = ...$ dan $x = ...$

Dengan melakukan kegiatan di atas anda dapat melakukan pemfaktoran dan penyelesaikan persamaan kuadrat. Bagaimana kalau persamaan kuadratnya adalah $x^2 + 2x - 1 = 0$? Bisakah anda menyelesaikannya dengan metode pemfaktoran? Mengapa?

Bagaimana kalau persamaan kuadratnya adalah $2x^2 - 2x - 12 = 0$? Bisakah anda menyelesaikannya dengan metode pemfaktoran? Jelaskan? (Petunjuk: uraikan terlebih dahulu $2x^2 - 2x - 12$ menjadi $2(x^2 - x - 6)$). Tuliskan langkah-langkah menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan menggunakan metode pemfaktoran.

Jumlahan dan Hasil Kali Akar-akar dari Persamaan Kuadrat

Pada langkah penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ (bisa ditulis $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$) menggunakan pemfaktoran harus ditentukan p dan q sedemikian hingga memenuhi

$$x^2 + \frac{b}{a}\text{x} + \frac{c}{a} = (x + p)(x + q)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}\text{x} + \frac{c}{a} = x^2 + (p + q)x + (p \times q)$$

Dengan cara ini didapatkan penyelesaiannya adalah $x_1 = -p$ dan $x_2 = -q$ sehingga $x_1 + x_2 = -p - q = -(p + q) = -\frac{...}{...}$ dan $x_1.x_2 = (-p)(-q) = pq = \frac{...}{...}$. Dari uraian ini didapat rumus untuk menentukan jumlah dan hasil kali persamaan kuadrat.

Terkait dengan fokus perhatian di atas, buatlah suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a, b, dan c tertentu (kalian tentukan sendiri). Dan tanyakan pada teman sebangkumu apakah persamaan yang kamu buat tersebut dapat diselesaikan dengan metode di atas? Jika bisa selesaikan.

Kegiatan 2 Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Selain menentukan akar persamaan dengan cara memfaktorkan, kalian dapat memperluas teknik penyelesaian persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna. Sebelum mempelajari lebih lanjut, kalian perlu mengenal terlebih dahulu tentang sifat akar.

1. Akar persamaan kuadrat $x^2 = 4$

   Dengan mudah dapat dihitung bahwa persamaan kuadrat $x^2 = 4$ mempunyai akar-akar $x = \sqrt{4}$ atau $x = -\sqrt{4}$ dan dapat disederhanakan menjadi $x = 2$ atau $x = -2$.

   Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa

   > *Jika $x^2 = k$, dengan k suatu bilangan tak negatif maka x = ... atau x = - ...*

2. Akar persamaan $(x + 5)^2 = 16$

   Sesuai sifat akar kuadrat maka diperoleh $x + 5 = \pm 4$. Sehingga, $x = \pm 4 - 5$ yang menunjukkan ada dua akar, yaitu

   $$x = 4 - 5 \text{ atau } x = -4 - 5$$

   $$x = -1 \text{ atau } x = -9$$

   > *Jika $(x + a)^2 = k$, dengan k suatu bilangan taknegatif dan a bilangan real, maka x = –a + ... atau x = –a – ...*

   Pada "Ayo Kita Amati" bagian 1 dan 2 di atas dinamakan sebagai bentuk kuadrat sempurna atau secara umum dituliskan sebagai $(x + p)^2 + q = 0$.

   Metode yang telah kalian pelajari pada Kegiatan 1 relatif mudah untuk diterapkan. Akan tetapi tidak semua persamaan kuadrat dapat diselesaikan secara langsung menggunakan metode tersebut. Sehingga kita harus mengembangkan metode penyelesaian persamaan kuadrat yang lain. Bagaimana jika ada soal-soal persamaan kuadrat seperti berikut?

   Tentukan akar persamaan kuadrat berikut dengan membentuk kuadrat sempurna terlebih dahulu.

   1. $x^2 - 5 = 0$
   2. $x^2 + 10x + 24 = 0$
   3. $x^2 - 8 = 0$
   4. $x^2 + 5x + 3 = 0$
   5. $x^2 - 37 = 0$
   6. $2x^2 + 7x + 3 = 0$

   Untuk menyelesaikan masalah di atas, ayo amati kegiatan berikut.

Ayo Kita Gali Informasi

Tahap inti dari metode ini adalah memfaktorkan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi bentuk kuadrat sempurna $(x + p)^2 + q = 0$ (jika diuraikan menjadi $x^2 + 2px + p^2 + q = 0$).

Untuk bentuk kuadrat sempurna, koefisien dari x^2 adalah 1 maka persamaan kuadrat yang akan diselesaikan ($ax^2 + bx + c = 0$) harus dibagi ... supaya koefisien dari x^2 juga 1. Sehingga didapat persamaan kuadrat baru yang ingin diselesaikan adalah $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Langkah berikutnya adalah mencari nilai p dan q sedemikian hingga memenuhi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + p)^2 + q$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2px + p^2 + q$$

Jadi untuk membentuk kuadrat sempurna harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a} = 2p$ dan $\frac{c}{a}$ = ... + ... atau lebih sederhana didapatkan $p = \frac{b}{2a}$ dan $q = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Ayo Kita Mencoba

- Persamaan kuadrat : $x^2 + 5x + 6 = 0$

  Didapat $b = 5$ dan $c = 6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a}$ = ... dan $\frac{c}{a}$ = ... + ... Dalam hal ini didapat p = ... dan q = ... sehingga bisa dituliskan

  $x^2 + 5x + 6 \quad = 0$

  $(x + p)^2 + q \quad = 0$

  $(x + ...)^2 + ... \quad = 0$

  $(x + ...)^2 \quad = ...$

$x + ... \quad = \pm ...$

$x \quad = ... \pm ...$

- Persamaan kuadrat : $x^2 + x - 6 = 0$

  Didapat $b = 1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a} = ...$ dan $\frac{c}{a} = ... + ...$ Dalam hal ini didapat $p = ...$ dan $q = ...$ sehingga bisa dituliskan

  $x^2 + x - 6 \quad = 0$

  $(x + p)^2 + q \quad = 0$

  $(x + ...)^2 + ... = 0$

  $(x + ...)^2 \quad = ...$

  $x + ... \quad = \pm ...$

  $x \quad = ... \pm ...$

- Persamaan kuadrat : $x^2 - x - 6 = 0$

  Didapat $b = -1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a} = ...$ dan $\frac{c}{a} = ... + ...$ Dalam hal ini didapat $p = ...$ dan $q = ...$ sehingga bisa dituliskan

  $x^2 - x - 6 \quad = 0$

  $(x + p)^2 + q \quad = 0$

  $(x + ...)^2 + ... \quad = 0$

  $(x + ...)^2 \quad = ...$

  $x + ... \quad = \pm ...$

  $x \quad = ... \pm ...$

Ayo Kita Menanya

Terkait dengan fokus perhatian di atas, buatlah suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a, b, dan c tertentu (kalian tentukan sendiri). Lalu, tanyakan pada teman sebangkumu apakah persamaan yang kamu buat tersebut dapat diselesaikan dengan metode di atas? Jika bisa, selesaikan.

Misal: Jika terdapat persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 7 = 1$.

"Manakah cara yang paling mudah untuk menentukan nilai dari persamaan kuadrat? Dengan menggunakan cara memfaktoran atau dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna?"

Penurunan rumus kuadratik/rumus abc

Pada bagian sebelumnya persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ (ekivalen dengan persamaan $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$) dapat diselesaikan dengan membentuk kuadrat sempurna $(x + p)^2 + q = 0$ dengan $p = \frac{b}{2a}$ dan $q = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ sehingga didapat akar-akar persamaan kuadrat yaitu

$$(x + p)^2 + q = 0$$

$$(x + p)^2 = -...$$

$$x + p = \pm ...$$

$$x = - ... \pm ...$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{\cdots c}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - \cdots c}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - \cdots c}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - \cdots c}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Berdasarkan uraian di atas didapat rumus untuk mendapatkan akar-akar persamaan kuadrat atau biasanya disebut sebagai **rumus kuadratik/rumus abc** yaitu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dan nilai di dalam akar disebut sebagai diskriminan (D) yaitu

$$D = b^2 - 4ac$$

Nilai diskriminan ini mempengaruhi penyelesaian/akar-akar dari persamaan kuadrat. Untuk memahami hal ini lakukan pengamatan berikut.

Berdasarkan hasil pengamatan dan informasi yang kalian dapatkan,gunakan nalar kalian untuk menentukan hubungan antara diskriminan dengan jenis-jenis akar selesaian persamaan kuadrat. Ayo perhatikan dan lengkapi tabel berikut.

Persamaan Kuadrat	Diskriminan	Selesaian
$x^2 + 5x + 6 = 0$	1	{–2, –3}
$2x^2 - 5x - 3 = 0$	...	...
$x^2 + 2x + 1 = 0$	0	{–1}
$x^2 - 4 = 0$	...	{2, –2}
$9x^2 - 6x + 1 = 0$	0	...
$x^2 + x + 1 = 0$	–3	{ } (tidak punya akar-akar)
$2x^2 + 2x + 1 = 0$	...	...

Ayo Kita Simpulkan

Berdasarkan hasil pengamatan pada tabel di atas dengan mengetahui diskriminan maka akar-akar dari persamaan kuadrat dibagi menjadi tiga kategori yaitu akar-akarnya kembar, akar-akarnya berbeda, dan tidak mempunyai akar-akar

- Untuk $D > 0$ maka akar-akarnya ...
- Untuk $D = 0$ maka akar-akarnya ...
- Untuk $D < 0$ maka akar-akarnya ...

Kegiatan 3 Penerapan Persamaan Kuadrat dalam Masalah Nyata

Kalian telah mempelajari tentang persamaan kuadrat. Coba aplikasikan persamaan kuadrat tersebut untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

Luas sebidang tanah berbentuk persegi panjang adalah 4.320 m^2. Panjang tanah itu 12 m lebih panjang daripada lebarnya. Berapakah panjang dan lebar sebidang tanah tersebut?

Alternatif Pemecahan Masalah

Misalnya panjang tanah = p meter

lebar tanah = x meter

maka $p = (12 + x)$ meter

Luas tanah = ... p

... = ... p

... = ... $(12 + x)$

$x^2 + 12x - 4.320 = 0$

selesaikan dengan metode yang sudah dibahas sehingga didapat

$x_1 = ...$ atau $x_2 = ...$

Karena ukuran panjang pada sebidang tanah tidak pernah negatif, maka x yang memenuhi adalah $x = ...$

Untuk $x = ...$ maka panjang tanah adalah $x + 12 = ...$

Jadi, panjang sebidang tanah tersebut adalah ... meter dan lebarnya adalah ... meter.

Materi Esensi 2.1 Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat satu variabel adalah suatu persamaan yang pangkat tertingginya dua. Secara umum, bentuk persamaan kuadrat adalah $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ dengan $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{a, b, c \in R}$. Konstanta $\boldsymbol{a, b, c}$ pada persamaan ini disebut sebagai koefisien. Beberapa contoh persamaan kuadrat yaitu: $3x^2 - 7x + 5 = 0$, $x^2 - x + 12 = 0$, $x^2 - 9 = 0$, $2x(x - 7) = 0$ dan lainnya.

Akar persamaan kuadrat dari $ax^2 + bx + c = 0$ adalah nilai x yang memenuhi persamaan tersebut. Cara menentukan akar persamaan kuadrat ada tiga cara, yaitu:

(1) Memfaktorkan

(2) Melengkapi Kuadrat Sempurna

(3) Rumus Kuadratik (Rumus abc)

Dalam hal ini rumus kuadratik (Rumus abc) adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Karakteristik dari akar-akar persamaan kuadrat dapat dilihat dari koefisen persamaannya. Berikut karakteristik-karakteristik dari persamaan kuadrat berdasarkan koefisien-koefisien persamaan kuadratnya:

- Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dan $x_1\,x_2 = \frac{c}{a}$.
- Misal suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan nilai diskriminannya adalah $D = b^2 - 4ac$ maka untuk $D < 0$ persamaan kuadrat tidak mempunyai akar-akar, $D = 0$ persamaan kuadrat mempunyai akar-akar kembar, $D > 0$ persamaan kuadrat mempunyai dua akar berbeda.

Contoh 1 **Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan**

Tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $x^2 - 15x + 14 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Langkah 1:

Carilah dua bilangan yang merupakan faktor dari 14 dan jika dijumlah sama dengan –15.

Misalkan dua bilangan tersebut adalah p dan q, maka $pq = 14$ dan $p + q = -15$

P	q	$p+q$	pq
1	14	15	14
2	7	9	14

P	Q	$p+q$	Pq
–1	–14	–15	14
–2	–7	–9	14

Dengan demikian bilangan yang memenuhi nilai $p = -1$ dan $q = -14$

Langkah 2:

Sehingga bentuk $x^2 - 15x + 14 = 0$ dapat difaktorkan menjadi

$x^2 - 15x + 14 = 0$

$(x - 1)(x - 14) = 0$

$x - 1 = 0$ atau $x - 14 = 0$

$x_1 = 1$ atau $x_2 = 14$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{1, 14\}$

Contoh 2 **Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Melengkapi Kuadrat Sempurna**

Tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $2x^2 + 7x + 3$.

Alternatif Penyelesaian:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 7x = -3$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24+49}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x + \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$$

$$x_1 = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = -3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ atau } x_2 = -3$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-\frac{1}{2}, -3\}$

Contoh 3 — Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Rumus Kuadratik (Rumus ABC)

Tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $2x^2 + 7x + 3$.

Alternatif Penyelesaian:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 5}{4}$$

Jadi $x_1 = -\frac{1}{2}$ dan $x_2 = -3$.

Contoh 4 — Aplikasi Persamaan Kuadrat

Sumber: https://repoebliek.files.wordpress.com

Keliling suatu taman kota yang berbentuk persegi panjang adalah 90 m. Jika luas taman 450 m², berapa panjang dan lebarnya?

Alternatif Pemecahan Masalah

Misalkan panjang = p

panjang + lebar = ½ keliling

lebar = $45 - p$

Persamaan : panjang × lebar = luas

$p(45 - p) = 450$

$45p - p^2 = 450$

$p^2 - 45p + 450 = 0$

$(p - 15)(p - 30) = 0$

$p - 15 = 0$ atau $p - 30 = 0$

$p = 15$ $\qquad$ $p = 30$

Untuk $p = 15$, maka lebar adalah $45 - 15 = 30$

Untuk $p = 30$, maka lebar adalah $45 - 30 = 15$

Jadi panjang dan lebar taman kota adalah 30 m dan 15 m.

Ayo Kita Tinjau Ulang

1. Persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 6 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $x_1 - 3$ dan $x_2 - 3$.
2. Dengan cara melengkapi kuadrat sempurna tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $x^2 + 7x + 3$.
3. Dengan cara menggunakan rumus kuadratik tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $x^2 + 7x + 3$.
4. Keliling suatu taman kota yang berbentuk persegi panjang adalah 100 m. Jika luas taman 400 m^2, berapa panjang dan lebarnya?

Latihan 2.1 Persamaan Kuadrat

1. Tentukan akar persamaan berikut.
   a. $3x^2 - 12 = 0$
   b. $x^2 + 7x + 6 = 0$
   c. $-3x^2 - 5x + 2 = 0$
2. Nyatakan persamaan $3(x^2 + 1) = x(x - 3)$ dalam bentuk umum persamaan kuadrat.
3. Akar-akar persamaan $3x^2 - 12x + 2 = 0$ adalah α dan β. Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $(\alpha + 2)$ dan $(\beta + 2)$.
4. Tentukan akar persamaan kuadrat berikut dengan 3 cara yang telah kalian pelajari.
   a. $x^2 - 1 = 0$
   b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
   c. $-3x^2 - 5x + 2 = 0$
   d. $2x^2 - x - 3 = 0$
   e. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
5. Tentukan nilai diskriminan persamaan pada soal no. 1.
6. Jika nilai diskriminan persamaan kuadrat $3x^2 - 5x + c = 0$ adalah 49, tentukan nilai c.

7. Ubahlah persamaan $3x^2 = 2x - 4$ kedalam bentuk umum persamaan kuadrat.

8. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut.
   a. $x^2 - 5x + 6 = 0$
   b. $x^2 + 2x - 15 = 0$
   c. $x^2 + 4x - 12 = 0$

9. Bagaimana bentuk persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 dan 5?

10. Nyatakan persamaan $2(x^2 + 1) = x(x + 3)$ dalam bentuk umum persamaan kuadrat.

2.2 Grafik Fungsi Kuadrat

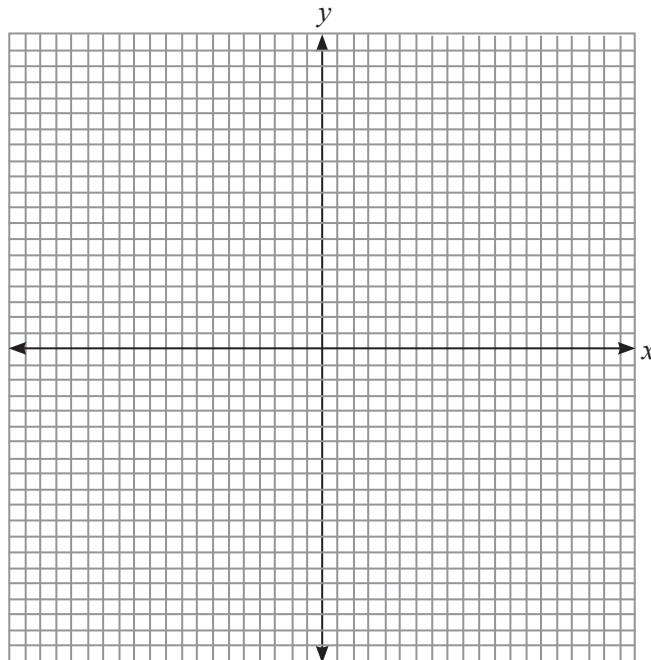
Pertanyaan Penting

Fungsi kuadrat adalah fungsi yang berbentuk $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$, x, $y \in R$. Fungsi kuadrat dapat pula dituliskan sebagai $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bagaimanakah cara menggambar fungsi kuadrat pada bidang kartesius? Apa pengaruh nilai a, b dan c terhadap grafik fungsi kuadrat?

Kegiatan 1 Menggambar Grafik Fungsi $y = ax^2$

Gambarlah grafik fungsi kuadrat yang paling sederhana, yakni ketika $b = c = 0$. Untuk mendapatkan grafiknya kamu dapat membuat gambar untuk beberapa nilai x dan mensubstitusikannya pada fungsi $y = ax^2$, misalkan untuk $a = 1$, $a = -1$ dan $a = 2$.

Kerjakan kegiatan ini dengan teman sebangkumu.

Ayo Kita Gali Informasi

Untuk mendapatkan grafik suatu fungsi kuadrat, kamu terlebih dahulu harus mendapatkan beberapa titik koordinat yang dilalui oleh fungsi kuadrat tersebut. Kamu dapat mencari titik koordinat tersebut dengan mensubstitusikan untuk beberapa nilai x yang berbeda.

a. Lengkapi ketiga tabel berikut.

x	$y = x^2$	(x, y)
–3	$(–3)^2 = 9$	(–3, 9)
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = –x^2$	(x, y)
–3	$–(–3)^2 = –9$	(–3, –9)
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = 2x^2$	(x, y)
–3	$2(–3)^2 = 18$	
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

b. Tempatkan titik-titik koordinat berada dalam tabel di atas pada bidang koordinat. (gunakan tiga warna berbeda).

c. Sketsa grafik dengan menghubungkan titik-titik koordinat tersebut (sesuai warna).

Keterangan: Gambarkan ketiga grafik tersebut menggunakan bidang koordinat di bawah ini dan amati tiap-tiap grafik.

Berdasarkan hasil pengamatan menggambar grafik maka didapatkan informasi berikut.

Grafik $y = x^2$ berupa parabola yang terbuka ke-…

Grafik $y = -x^2$ berupa parabola yang terbuka ke-…

Grafik $y = 2x^2$ berupa parabola yang terbuka ke-…

Grafik $y = x^2$ dan $y = 2x^2$ sama-sama parabola yang terbuka ke-… dan perbedaannya adalah grafik $y = x^2$ lebih … daripada grafik $y = 2x^2$.

Berdasarkan Kegiatan 1, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

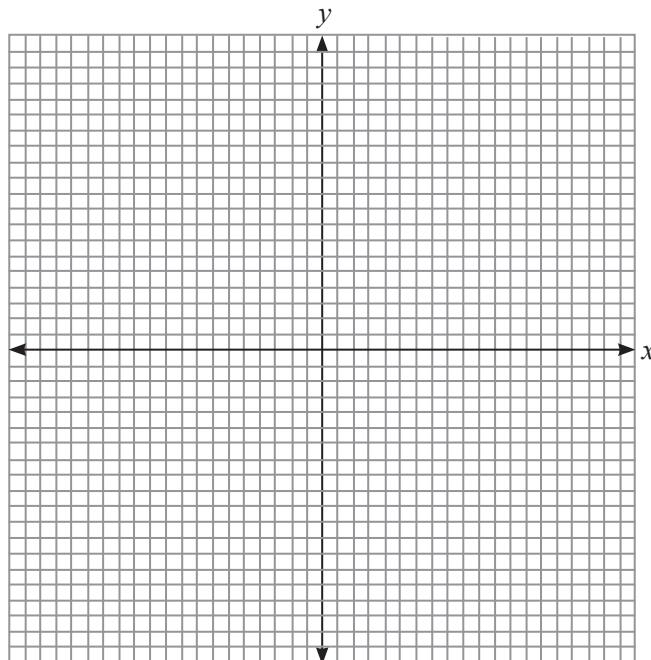
Nilai a pada fungsi $y = ax^2$ akan mempengaruhi bentuk grafiknya.

1. Jika $a > 0$ maka ...
2. Jika $a < 0$ maka ...
3. Jika $a > 0$ dan nilai a makin besar maka ...
4. Jika $a < 0$ dan nilai a makin kecil maka ...

Ayo Kita Menanya

Buatlah suatu fungsi kuadrat dan tanyakan kepada teman sebangkumu, “Apakah grafik dari fungsi kuadrat tersebut terbuka ke atas atau ke bawah? Jelaskan.”

Kegiatan 2 Menggambar Grafik Fungsi $y = x^2 + c$

Pada kegiatan ini kamu akan menggambar grafik fungsi kuadrat ketika $b = 0$ dan $c \neq 0$. Kegiatan ini dibagi menjadi dua subkegiatan. Pada kegiatan ini kamu mengambar grafik fungsi $y = x^2 + c$ sebanyak dua kali, yakni untuk $c = 1$ dan $c = -1$.

a. Lengkapi ketiga tabel berikut.

x	$y = x^2 + 1$	(x, y)
–3	$(-3)^2 + 1 = 10$	(–3, –9)
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
–3	$(-3)^2 - 1 = 8$	(–3, 8)
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

b. Tempatkan titik-titik koordinat dalam tabel di atas pada bidang koordinat.

c. Sketsa grafik dengan menghubungkan titik-titik koordinat tersebut (sesuai warna).

d. Gambarlah kembali grafik $y = x^2$ seperti pada Kegiatan 1.

Keterangan: Gambarkan ketiga grafik tersebut menggunakan bidang koordinat di bawah ini dan amati tiap-tiap grafik.

Berdasarkan hasil pengamatanmu, lengkapi kalimat-kalimat berikut.

a. Grafik fungsi $y = x^2$ memotong sumbu-y di titik koordinat (... , ...).

b. Grafik fungsi $y = x^2 + 1$ memotong sumbu-y di titik koordinat (... , ...).

c. Grafik fungsi $y = x^2 – 1$ memotong sumbu-y di titik koordinat (... , ...).

d. Grafik fungsi $y = x^2 + 1$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar ... satuan ke ...

e. Grafik fungsi $y = x^2 – 1$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar ... satuan ke ...

a. Untuk c positif, grafik fungsi $y = x^2 + c$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar .... satuan ke ....

b. Untuk c negatif, grafik fungsi $y = x^2 + c$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar .... satuan ke ....

c. Grafik fungsi $y = x^2 + c$ memotong sumbu-y di titik koordinat (..... , ...)

Buatlah dua fungsi kuadrat dengan nilai c berbeda tapi a dan b sama. Tanyakan kepada teman sebangkumu, “Jelaskan pergeseran yang terjadi antara dua grafik dari fungsi-fungsi tersebut.”

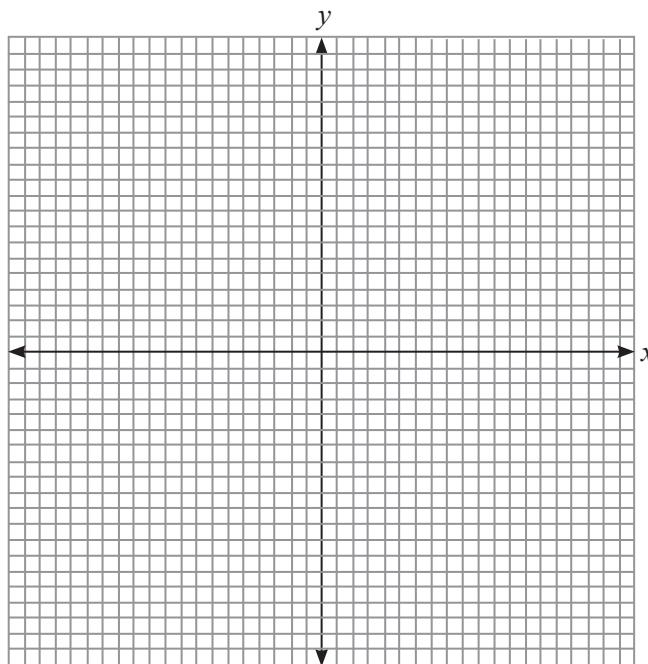
Kegiatan 3 Menggambar Grafik Fungsi $y = x^2 + bx$

Pada kegiatan ini kamu akan menggambar grafik fungsi kuadrat ketika $c = 0$ dan $b \neq 0$. Kegiatan ini dibagi menjadi tiga subkegiatan, yakni ketika $b = 1$, $b = –1$ dan $b = 2$. Pada kegiatan ini kamu akan mengenal titik puncak dari suatu grafik fungsi kuadrat.

Ayo Kita Gali Informasi

Kerjakan kegiatan ini bersama teman sebangkumu.

a. Lengkapi keempat tabel berikut.

x	$y = x^2 + 2x$	(x, y)
–3	$(-3)^2 + 2(-3) = 3$	$(-3, 3)$
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = x^2 - 2x$	(x, y)
–3	$(-3)^2 - 2(-3) = 15$	$(-3, 15)$
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = -x^2 + 2x$	(x, y)
–3	$-(-3)^2 + 2(-3) = -15$	$(-3, -15)$
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = -x^2 - 2x$	(x, y)
–3	$-(-3)^2 - 2(-3) = -3$	$(-3, -3)$
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		

b. Tempatkan titik-titik koordinat dalam tabel pada bidang koordinat (gunakan empat warna berbeda untuk tabel).

c. Sketsa grafik dengan menghubungkan titik-titik koordinat tersebut (sesuai warna).

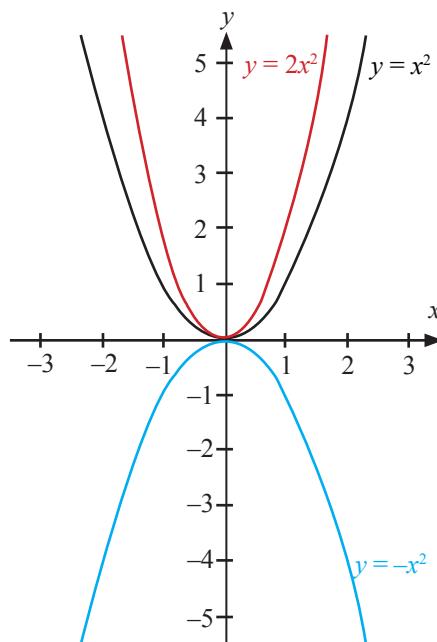
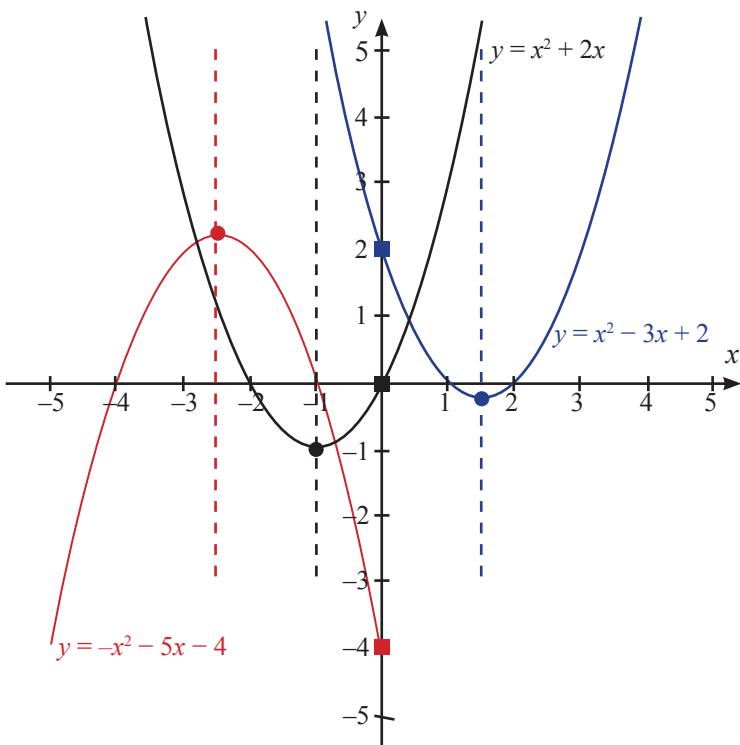
Keterangan: Gambarkan keempat grafik tersebut menggunakan bidang koordinat di bawah ini dan amati tiap-tiap grafik. Pada tiap-tiap grafik tentukan koordinat titik yang paling bawah (titik koordinat ini selanjutnya disebut titik puncak).

d. Pada dua tabel pertama tentukan nilai y yang paling kecil. Perhatikan hubungan anatara nilai b dengan nilai y yang paling kecil dari tiap tabel tersebut. Apa yang saudara dapatkan?

e. Pada dua tabel terakhir tentukan nilai y yang paling besar. Perhatikan hubungan antara nilai b dengan nilai y yang paling besar dari tiap tabel tersebut. Apa yang saudara dapatkan?

f. Ulangi kegiatan ini dengan fungsi kuadrat $y = -x^2 + x$, $y = -x^2 - x$. Selanjutnya tentukan titik yang paling atas (titik koordinat ini juga disebut dengan titik puncak).

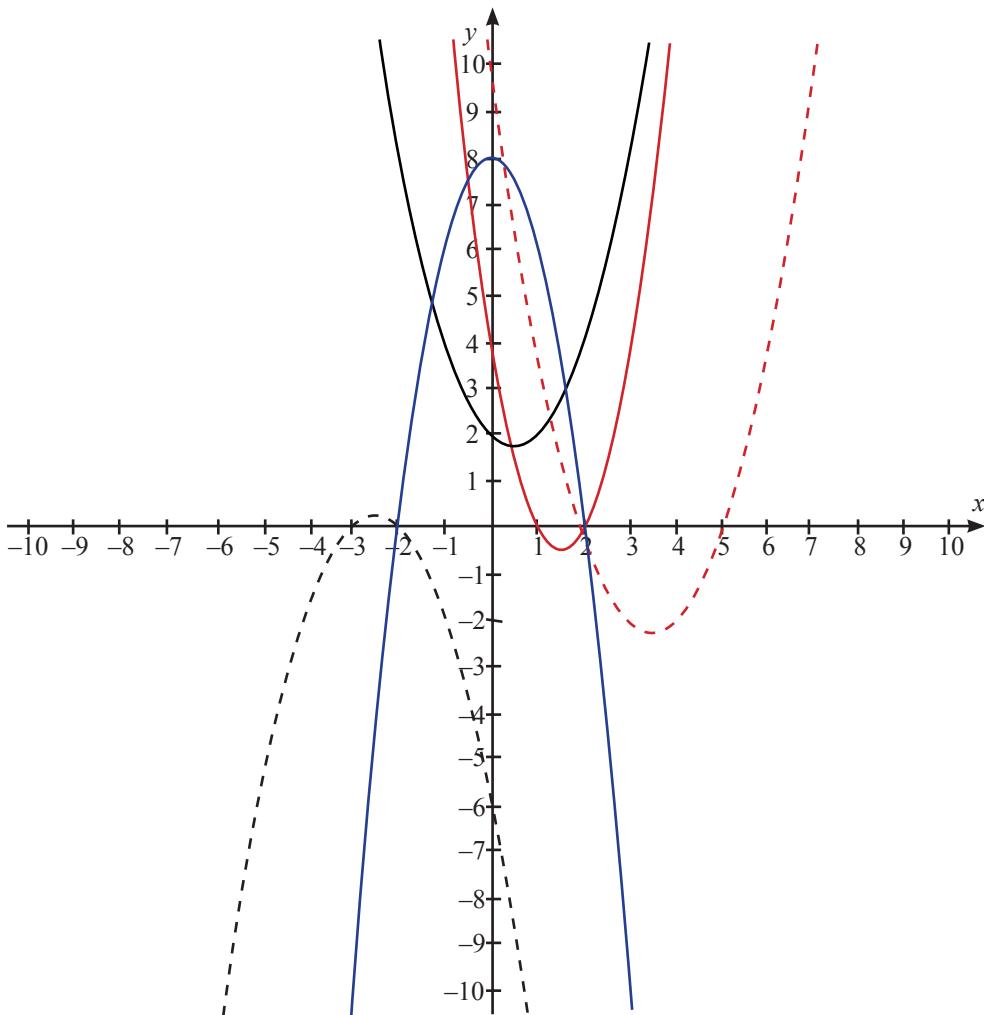
Nilai y yang paling kecil (untuk $a > 0$) dan y yang paling besar (untuk $a < 0$) dinamakan nilai optimum (y_p) dan jika x_p yang menyebabkan nilai y optimum maka (x_p, y_p) dinamakan titik puncak atau titik optimum. Pembahasan mengenai nilai optimum ini akan dijelaskan lebih lanjut pada subbab selanjutnya.

Untuk $y = x^2 + bx$ maka nilai optimumnya adalah … dan $y = -x^2 + bx$ maka nilai optimumnya adalah …

Buatlah fungsi kuadrat yang berbentuk $y = x^2 + bx$ dan tanyakan pada teman sebangkumu berapa nilai optimumnya.

Materi Esensi 2.2 Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat merupakan fungsi yang berbentuk $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$. Grafik dari fungsi kuadrat menyerupai parabloa, sehingga dapat dikatakan juga sebagai fungsi parabola.

Gambar Perbandingan Grafik fungsi kuadrat $y = x^2$, $y = -x^2$ dan $y = 2x^2$

Nilai a pada fungsi $y = ax^2 + bx + c$ akan mempengaruhi bentuk grafiknya. Jika a positif maka grafiknya akan terbuka ke atas. Sebaliknya jika a negatif maka grafiknya akan terbuka ke bawah. Jika nilai a semakin besar maka grafiknya menjadi lebih "kurus".

Gambar Perbandingan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 - 3x + 2$ dan $y = -x^2 - 5x - 4$

Garis putus-putus pada gambar di atas menerupakan sumbu simetri. Koordinat yang ditandai dengan bulatan merupakan titik puncak sedangkan koordinat yang ditandai dengan persegi merupakan titik potong dengan sumbu-y.

Nilai b pada grafik $y = ax^2 + bx + c$ menunjukkan letak koordinat titik puncak dan sumbu simetri (titik puncak dan sumbu simetri dibahas lebih lanjut pada subbab selanjutnya). Jika $a > 0$, grafik $y = ax^2 + bx + c$ memiliki titik puncak minimum. Jika $a < 0$, grafik $y = ax^2 + bx + c$ memiliki titik puncak maksimum.

Nilai c pada grafik $y = ax^2 + bx + c$ menunjukkan titik perpotongan grafik fungsi kuadrat tersebut dengan sumbu-y, yakni pada koordinat $(0, c)$.

Contoh 1 Grafik Fungsi Kuadrat

Berikut ini adalah grafik lima fungsi kuadrat yang berbeda.

1. Grafik yang berwarna hitam merupakan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - x + 2$. Grafik $y = x^2 - x + 2$ memotong sumbu-y pada koordinat (0, 2) dan memiliki titik puncak minimum.
2. Grafik yang berwarna merah merupakan grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 - 6x + 4$. Grafik $y = 2x^2 - 6x + 4$ memotong sumbu-y pada koordinat (0, 4) dan memiliki titik puncak minimum.
3. Grafik yang berwarna biru merupakan grafik fungsi kuadrat $y = -2x^2 + 8$. Grafik $y = -2x^2 + 8$ memotong sumbu-y pada koordinat (0, 8) dan memiliki titik puncak maksimum.

4. Grafik yang berwarna merah dengan garis putus-putus merupakan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 7x + 10$. Grafik $y = x^2 - 7x + 10$ memotong sumbu-y pada koordinat (0, 10) dan memiliki titik puncak minimum.

5. Grafik yang berwarna biru dengan garis putus-putus merupakan grafik fungsi kuadrat $y = -x^2 - 5x - 6$. Grafik $y = -x^2 - 5x - 6$ memotong sumbu-y pada koordinat (0, –6) dan memiliki titik puncak maksimum.

Ayo Kita Tinjau Ulang

1. Mengapa fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ disyaratkan $a \neq 0$? Jelaskan alasanmu.
2. Terdapat dua fungsi kuadrat, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan $g(x) = -f(x) = -ax^2 - bx - c$. Apa yang dapat disimpulkan dari grafik $f(x)$ dan $g(x)$.

Latihan 2.2 Grafik Fungsi Kuadrat

1. Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.

   a. $y = \frac{1}{2}x^2$ c. $y = -\frac{1}{2}x^2$

   b. $y = \frac{1}{4}x^2$ d. $y = -\frac{1}{2}x^2$

2. Dari Soal 1, apa yang dapat kamu simpulkan mengenai grafik $y = ax^2$ dengan $|a| < 1$ dan $a \neq 0$?

3. Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.

   a. $y = x^2 + 3x + 2$ c. $y = x^2 + 5x + 6$

   b. $y = x^2 - 3x + 2$ d. $y = x^2 - 5x + 6$

4. Dari Soal 3, apa yang dapat kamu simpulkan mengenai perbandingan grafik $y = ax^2 + bx + c$ dengan $y = ax^2 - bx + c$?

5. Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.

   a. $y = x^2 + 4x + 2$ c. $y = x^2 - 5x + 5$

   b. $y = -x^2 + 2x + 3$ d. $y = -2x^2 + 4x + 5$

6. Dari soal nomor 5, tentukan titik puncak tiap-tiap grafik. Tentukan pula hubungan titik puncak grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ dengan nilai $-\frac{b}{2a}$.
7. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu-x? Jelaskan alasanmu.
8. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu-y? Jelaskan alasanmu.
9. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat memotong sumbu-x pada tiga titik koordinat berbeda? Jelaskan alasanmu.
10. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat memotong sumbu-y pada dua titik koordinat berbeda? Jelaskan alasanmu.

2.3 Sumbu Simetri dan Nilai Optimum

Pertanyaan Penting

a. Bagaimana kamu menentukan sumbu simetri grafik fungsi kuadrat?
b. Bagaimana menentukan nilai optimum fungsi kuadrat tersebut?

Kegiatan 1 Pergeseran Grafik Fungsi Kuadrat

Ayo Kita Amati

1. Gambarlah dan amati grafik fungsi kuadrat di bawah ini pada bidang koordinat.
   a. $f(x) = x^2$
   b. $f(x) = (x - 1)^2$
   c. $f(x) = (x - 2)^2$
   d. $f(x) = (x + 1)^2$
   e. $f(x) = (x + 2)^2$
2. Gambarlah dan amati grafik fungsi kuadrat di bawah ini pada bidang koordinat.
   a. $f(x) = x^2$
   b. $f(x) = x^2 + 1$
   c. $f(x) = x^2 + 2$
   d. $f(x) = x^2 - 1$
   e. $f(x) = x^2 - 2$

Berdasarkan kegiatan di atas, bandingkan grafik lima fungsi pada bagian (1)

Grafik $f(x) = (x - 1)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = (x - 2)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = (x + 1)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = (x + 2)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

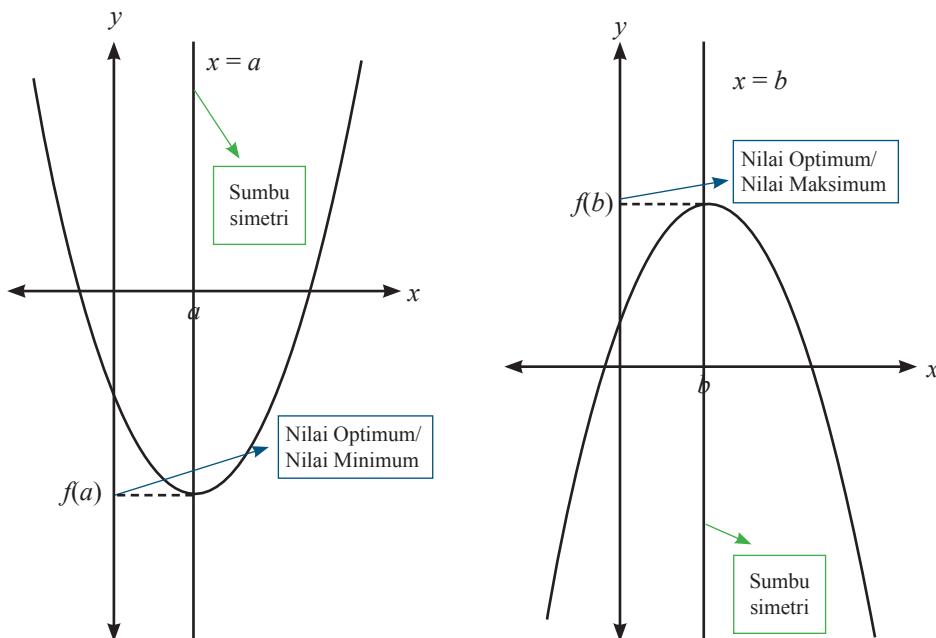
Bandingkan grafik dari lima fungsi pada bagian (2)

Grafik $f(x) = x^2 + 1$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = x^2 + 2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = x^2 - 1$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = x^2 - 2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Berdasarkan kegiatan di atas, maka

1. Untuk s positif maka grafik $f(x) = (x - s)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
2. Untuk s positif maka grafik $f(x) = (x + s)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
3. Untuk t positif maka grafik $f(x) = x^2 + t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
4. Untuk t positif maka grafik $f(x) = x^2 - t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
5. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x - s)^2 + t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...

6. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x - s)^2 - t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...
7. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x + s)^2 + t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...
8. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x + s)^2 - t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...

Kegiatan 2 Menentukan Sumbu Simetri dan Nilai Optimum

Buatlah sumbu simetri untuk setiap grafik yang telah dibuat pada Kegiatan 1. Dalam bagian ini digunakan istilah nilai optimum yaitu nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi $f(x)$ sehingga dengan demikian jika $f(x)$) adalah fungsi kuadrat (grafik berbentuk parabola) dan $x = a$ adalah sumbu simetri dari grafik fungsi $f(x)$ maka nilai optimumnya adalah $f(a)$ (untuk lebih jelasnya lihat gambar di bawah ini). Gunakan materi yang dibahas pada bagian sebelumnya yaitu tentang pergeseran grafik untuk menjawab bagian "**Ayo Kita Menalar**" berikut.

Isilah tabel di bawah ini.

Fungsi	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x - 1)^2$	$f(x) = (x - 2)^2$	$f(x) = (x + 1)^2$	$f(x) = (x + 2)^2$
Sumbu simetri	$x = 0$	$x = ...$	$x = ...$	$x = ...$	$x = ...$
Nilai optimum	$f(0) = 0$	$f(...) = ...$	$f(...) = ...$	$f(...) = ...$	$f(...) = ...$

Isilah tabel di bawah ini.

Fungsi	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = x^2 + 2$	$f(x) = x^2 - 1$	$f(x) = x^2 - 2$
Sumbu simetri	$x = 0$	$x = ...$	$x = ...$	$x = ...$	$x = ...$
Nilai optimum	$f(0) = 0$	$f(...) = ...$	$f(...) = ...$	$f(...) = ...$	$f(...) = ...$

Berdasarkan pengamatan di atas, jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi $f(x) = (x - s)^2$?
2. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi $f(x) = x^2 + t$?
3. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi $f(x) = (x - s)^2 + t$?

Sumbu simetri grafik fungsi $f(x) = ax^2$ adalah ...

Jadi

Sumbu simetri grafik fungsi $f(x) = a\ (x - s)^2$ adalah ... dan nilai optimumnya adalah ...

Sumbu simetri grafik fungsi $f(x) = a\ (x - s)^2 + t$ adalah ... dan nilai optimumnya adalah ...

Kemudian untuk

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \ldots\right) - a(\ldots)^2 + c$$

$$= a(x+\ldots)^2 - a(\ldots) + c = a(x+\ldots)^2 - \frac{\ldots}{4a} + c$$

$$= a(x+\ldots)^2 - \frac{\ldots}{4a} + \frac{\ldots}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - \ldots}{4a}$$

didapatkan sumbu simetrinya adalah

$$x = \ldots,$$

dengan nilai optimumnya adalah

$$f(\ldots) = \ldots,$$

sehingga titik optimumnya adalah

$$(\ldots, \ldots)$$

Apa rumus untuk mendapatkan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Kegiatan 3 Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat

Sketsalah grafik $f(x) = 3x^2 - 10x + 9$ dan $f(x) = -2x^2 + 12x - 20$.

Berikut adalah langkah-langkah menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat dengan menggunakan sifat-sifat yang telah dibahas pada bagian sebelumnya.

1. Periksalah, apakah bentuk parabola grafik fungsi di atas terbuka ke atas atau ke bawah! (dengan melihat nilai dari koefisien x^2)
2. Tentukan perpotongan grafik terhadap sumbu-x; yaitu, koordinat titik potongnya adalah $(x_1, 0)$ yang memenuhi persamaan

$$f(x_1) = 0$$

   (Perhatikan apakah persamaan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak, jika tidak apa yang bisa kamu simpulkan? (ingat kembali pada materi sebelumnya yaitu tentang hubungan antara diskriminan dan penyelesaian dari persamaan kuadrat))
3. Tentukan perpotongan grafik terhadap sumbu-y; yaitu,koordinat titik potongnya adalah $(0, y_1)$ dengan y_1 didapatkan berdasarkan persamaan

$$y_1 = f(0)$$

4. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi di atas.
5. Dari informasi yang didapatkan, sketsalah grafik fungsi kuadrat di atas.

Diskusikan dengan temanmu, bagaimana bentuk grafik $f(x) = \sqrt{x}$ dan $f(x) = -\sqrt{x}$? Bandingkan grafiknya dengan grafik persamaan kuadrat. Apa yang bisa kamu dapatkan dari analisis ini?

Buatlah fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$, lalu mintalah temanmu sebangkumu untuk menggambar grafik dari fungsi tersebut.

Materi Esensi 2.3 Menentukan Sumbu Simetri dan Titik Optimum

Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai sumbu simetri

$$x = -\frac{b}{a}$$

Dengan nilai optimumnya adalah

$$y_0 = -\frac{D}{4a}$$

Langkah-langkah mensketsa grafik fungsi kuadrat:

Langkah 1. Menentukan bentuk parabola (terbuka ke atas atau ke bawah).

Langkah 2. Menentukan perpotongan grafik terhadap sumbu-x; yaitu, koordinat titik potongnya adalah $(x_1, 0)$ yang memenuhi persamaan

$$f(x_1) = 0$$

Langkah 3. Menentukan perpotongan grafik terhadap sumbu-y; yaitu, koordinat titik potongnya adalah $(0, y_1)$ dengan y_1 didapatkan berdasarkan persamaan

$$y_1 = f(0)$$

Langkah 4. Menentukan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi.

Langkah 5. Mensketsa grafik fungsi kuadrat berdasarkan langkah (1), (2), (3), dan (4).

Contoh 1 Menentukan Sumbu Simetri dan Nilai Optimum

Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + \frac{1}{2}$.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui: fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + \frac{1}{2}$, didapatkan $a = 1$, $b = -4$ dan $c = \frac{1}{2}$.

Ditanya: sumbu simetri dan titik optimum

Penyelesaian:

Persamaan sumbu simetrinya adalah

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

Nilai optimum fungsi tersebut adalah

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4(1)(\frac{1}{2})}{4(1)} = -\frac{7}{2}$$

Sehingga titik optimumnya adalah

$$(x, y_0) = (2, -\frac{7}{2})$$

Contoh 2 **Menentukan Nilai Maksimum dan Minimun**

Tentukan apakah fungsi $f(x) = -2x^2 - 12x - 17$ mempunyai nilai maksimum atau minimum. Tentukan nilainya.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 - 12x - 17$

didapatkan $a = -2$, $b = -12$ dan $c = -17$.

Ditanya : Tentukan apakah ada nilai maksimum atau minimum. Tentukan nilai maksimum atau minimumnya.

Penyelesaian :

Karena nilai $a = -2 < 0$ maka parabola terbuka ke bawah sehingga yang ada hanya nilai maksimum. Nilai maksimumnya adalah

$$y_m = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-12)^2 - 4(2)(-17)}{4(-2)} = -\frac{144 - 136}{-8} = 1$$

Contoh 3 **Sketsa Grafik**

Sketsalah grafik $f(x) = x^2 - 6x + 10$

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui: fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 6x + 10$, didapat $a = 1$, $b = -6$ dan $c = 10$

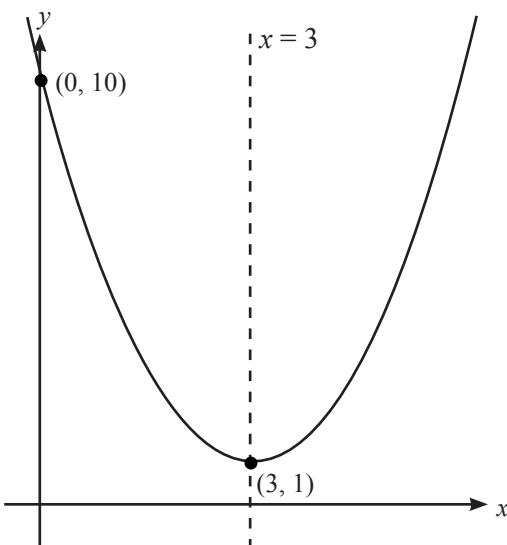
Ditanya: Sketsa grafik

Penyelesaian :

Langkah 1. Karena $a = 1 > 0$ maka parabola terbuka ke atas

Langkah 2. Perpotongan grafik terhadap sumbu-x

Dihitung bahwa $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(10) = -4 < 0$. Sehingga grafik tidak memotong sumbu-x.

Langkah 3. Perpotongan grafik terhadap sumbu-y

$y_0 = f(0) = 10$ yaitu pada titik (0, 10).

Langkah 4. Sumbu simetri dan nilai optimum dari fungsi

Sumbu simetrinya adalah $x = -\frac{b}{2a} = 3$ dan nilai optimumnya didapat

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(1)(10)}{4(1)} = -\frac{-4}{4} = 1$$

Langkah 5. Sketsa Grafik

1. Tentukan fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + c$ sedemikian hingga nilai optimumnya adalah 20.

2. Tentukan nilai a dan b untuk fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + 1$ sedemikian hingga
   a. Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai maksimum 10 dan sumbu simetri $x = 3$.
   b. Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai minimum dengan nilai minimum –10 dan sumbu simetri $x = 3$.

3. Sketsalah grafik $f(x) = -3x^2 - 10x + 9$

Latihan 2.3 Sumbu Simetri dan Titik Optimum

1. Tentukan sumbu simetri grafik fungsi di bawah ini.

   a. $y = 2x^2 - 5x$

   b. $y = 3x^2 + 12x$

   c. $y = -8x^2 - 16x - 1$

2. Tentukan nilai optimum fungsi berikut ini.

   a. $y = -6x^2 + 24x - 19$

   b. $y = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 15$

   c. $y = -\frac{3}{4}x^2 + 7x - 18$

3. Sketsalah grafik fungsi berikut ini.

   a. $y = 2x^2 + 9x$

   b. $y = 8x^2 - 16x + 6$

4. Diketahui suatu barisan 1, 7, 16, …. Suku ke-n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukan suku ke 100.

5. Diketahui suatu barisan 0, –9, –12, ... Suku ke-n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = \text{an}^2 + bn + c$. Tentukan nilai minimum dari barisan tersebut.

6. Fungsi kuadrat $y = f(x)$ melalui titik (3, –12) dan (7, 36). Jika sumbu simetrinya $x = 3$, tentukan nilai minimum fungsi $f(x)$.

7. Bila fungsi $y = 2x^2 + 6x - m$ mempunyai nilai minimum 3 maka tentukan m.

8. Dari tahun 1995 sampai 2002, banyaknya pelanggan telepon genggam N (dalam juta orang) dapat dimodelkan oleh persamaan $N = 17{,}4x^2 + 36{,}1x + 83{,}3$, dengan $x = 0$ merepresentasikan tahun 1995. Pada tahun berapa banyaknya pelanggan mencapai nilai maksimum?

9. Jumlah dua bilangan adalah 30. Jika hasil kali kedua bilangan menghasilkan nilai yang maksimum, tentukan kedua bilangan tersebut.

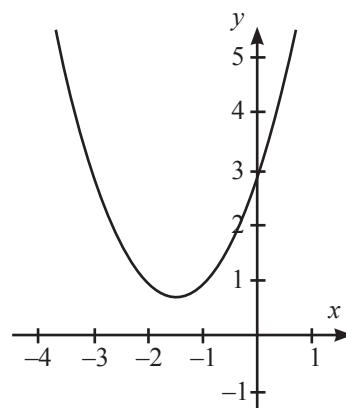
10. Selisih dua bilangan adalah 10. Jika hasil kali kedua bilangan menghasilkan nilai yang minimum, tentukan kedua bilangan tersebut.

2.4 Menentukan Fungsi Kuadrat

Kamu sudah mengetahui bagaimana cara menggambar grafik suatu fungsi kuadrat. Kamu juga sudah mengetahui bagaimana mendapatkan titik puncak, titik potong dan sumbu simetri. Pada sub-bab ini kamu akan mengetahui cara untuk menentukan fungsi kuadrat dari informasi yang ada.

Pertanyaan Penting

a. Bagaimana cara menentukan fungsi kuadrat jika sudah diketahui grafiknya?

b. Bagaimana cara menentukan fungsi kuadrat jika diketahui titik puncak, titik potong atau sumbu simetri?

Kegiatan 1 Menentukan Fungsi Kuadrat Berdasarkan Grafiknya

Ayo Kita Gali Informasi

Gambar di samping merupakan grafik suatu fungsi kuadrat. Dapatkah kamu menentukan suatu fungsi yang grafiknya seperti gambar di samping?

a. Informasi apakah yang kamu peroleh dari grafik di samping?

b. Apakah grafik di samping memotong sumbu-x?

c. Pada koordinat mana grafik di samping memotong sumbu-y?

Diskusikan dengan temanmu tiga pertanyaan di atas. Kemudian diskusikan pertanyaan berikut.

a. Berdasarkan jawaban tiga pertanyaan di atas, apakah kamu dapat menentukan fungsi kuadrat sesuai di atas?

b. Minimal berapa koordinat yang harus diketahui agar kamu bisa menentukan tepat satu fungsi kuadrat berdasarkan grafik?

Kegiatan 2 Menentukan Fungsi Kuadrat Berdasarkan Titik Potong Sumbu-x

Kamu sudah mengetahui cara mendapatkan akar-akar fungsi kuadrat $f(x) = 0$. Diberikan fungsi kuadrat berikut.

i. $f(x) = x^2 + 3x + 4$

ii. $f(x) = x^2 + 4x + 4$

iii. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Ayo Kita Gali Informasi

a. Tentukan akar-akar tiap-tiap persamaan kuadrat $f(x) = 0$. Tentukan persamaan $f(x) = 0$ yang tidak memiliki akar, persamaan $f(x) = 0$ yang memiliki satu akar, dan persamaan $f(x) = 0$ yang memiliki dua akar.

b. Gambarkan grafik tiap-tiap fungsi kuadrat.

c. Tentukan fungsi kuadrat yang tidak memotong sumbu-x, fungsi yang memotong sumbu-x di satu titik dan yang memotong sumbu-x di dua titik.

d. Apa yang dapat kamu simpulkan mengenai hubungan akar-akar persamaan $f(x) = 0$ dengan titik potong sumbu-x?

Misalkan terdapat dua fungsi kuadrat;

$$y = x^2 + 3x + 2 \text{ dan } y = 2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2)$$

Diskusikan beberapa pertanyaan berikut.

a. Tentukan akar-akar untuk persamaan $f(x) = 0$ untuk fungsi-fungsi kuadrat di atas. Apakah hasilnya sama untuk kedua fungsi-fungsi di atas?

b. Gambarkan grafik tiap-tiap fungsi kuadrat. Apakah kedua fungsi kuadrat tersebut memiliki grafik yang sama?

c. Apa yang dapat kamu simpulkan?

d. Jika diketahui akar-akar dari persamaan $f(x) = 0$, apakah kamu pasti selalu bisa menentukan fungsi kuadratnya?

Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dengan $y = 0$ memiliki akar-akar $x = p$ dan $x = q$ dengan $p \neq q$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut akan memotong sumbu-x pada koordinat ... dan ... . Bentuk umumnya adalah ...

Kegiatan 3 Menentukan Fungsi Kuadrat dari Beberapa Informasi

Pada kegiatan ini kamu akan mempelajari dan menganalisis cara menentukan fungsi kuadrat dari beberapa informasi. Informasinya adalah sebagai berikut:

a. Titik potong dengan sumbu-x.

b. Titik potong dengan sumbu-y.

c. Titik puncak dan sumbu simetri.

d. Beberapa titik koordinat yang dilalui fungsi kuadrat tersebut.

Berdasarkan Kegiatan 1 dan 2, kamu masih belum bisa menentukan fungsi kuadrat jika hanya diketahui satu informasi dari empat informasi di atas.

1. Jika diketahui tiga koordinat berbeda

Perhatikan gambar di samping. Misalkan terdapat suatu fungsi kuadrat yang grafiknya melalui tiga koordinat berbeda, yakni (0, 1), (1, 3), dan (2, 7).

Apakah kamu dapat menentukan fungsi kuadrat berdasarkan tiga koordinat yang diketahui dan bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

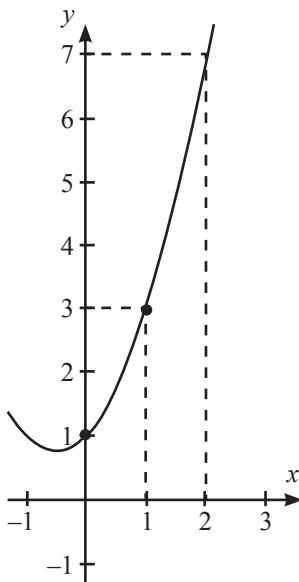
b. Karena melewati koordinat (0, 1), (1, 3) dan (2, 7) diperoleh $f(0) = 3$, $f(1) = 3$ dan $f(2) = 7$.

- $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1 \rightarrow c = 1$. Diperoleh

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + 1}$$

- $f(1) = a(1)^2 + b(1) + 1 = 3 \rightarrow a + b + 1 = 3$. Diperoleh persamaan

$$\boldsymbol{a + b = 2} \qquad \textbf{... (1)}$$

- $f(2) = a(2)^2 + b(2) + 1 = 7 \rightarrow 4a + 2b + 1 = 7$. Diperoleh persamaan

$$\boldsymbol{4a + 2b = 6} \qquad \textbf{... (2)}$$

c. Dengan mensubstitusi $a = 2 - b$ ke persamaan (2) , diperoleh $b = ...$

d. Dari hasil c diperoleh $a = ...$

e. Sehingga fungsi kuadrat yang memenuhi adalah

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ...$$

Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ melalui titik koordinat (p, q) diperoleh hubungan ...

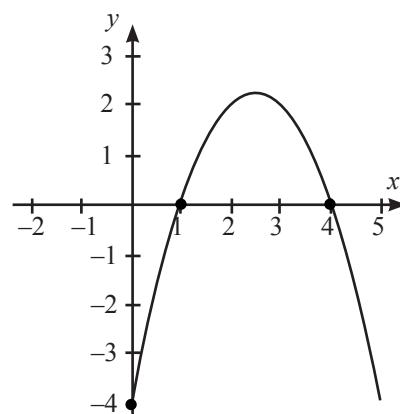
2. Jika diketahui titik potong dengan sumbu-*x* dan sumbu-y

Perhatikan gambar di samping. Misalkan terdapat suatu grafik fungsi kuadrat yang memotong sumbu-x di (1, 0) dan (4, 0). Fungsi kuadrat tersebut juga memotong sumbu-y di (0, –4).

Apakah kamu sudah bisa menentukan fungsi kuadratnya? Bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Karena memotong sumbu-x di (1, 0) dan (4, 0), dapat dituliskan

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - ...)(x - ...).$$

c. Karena memotong sumbu-y di (0, –4), diperoleh $f(0) = –4$.

$$f(0) = a(0 - ...)(0 - ...)$$

$$–4 = a \times ...$$

Diperoleh $a = ...$ dan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c = ...$

Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu-x pada titik koordinat (p, 0) dan (q, 0) maka fungsi kuadrat tersebut dapat dituliskan menjadi

$$f(x) = ...$$

Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu-y pada titik koordinat (0, r) maka diperoleh

$$f(0) = ...$$

Dengan mensubstitusikan nilai $x = 0$ pada fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh

$$f(0) = ...$$

yang berakibat ...

3. Jika diketahui titik potong sumbu-x dan titik puncak

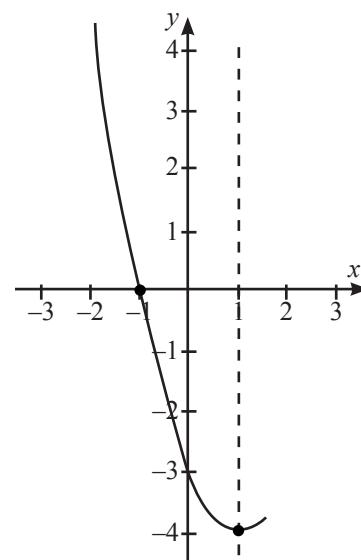
Perhatikan gambar di samping. Terdapat suatu fungsi kuadrat yang memotong sumbu-x di (–1, 0). Titik puncak fungsi kuadrat tersebut berada di koordinat (1, –4).

Apakah kamu sudah bisa menentukan fungsi kuadratnya dan bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Berdasarkan grafik di samping diperoleh sumbu simetri $x = 1$. Berdasarkan sifat simetri, titik potong di sumbu-x yang lain adalah hasil pencerminan kooordinat (–1, 0) terhadap garis $x = 1$, yakni koordinat dengan $x =$ ......

c. Sehingga fungsi kuadratnya dapat dinyatakan dengan

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + 1)(x - ...)$$

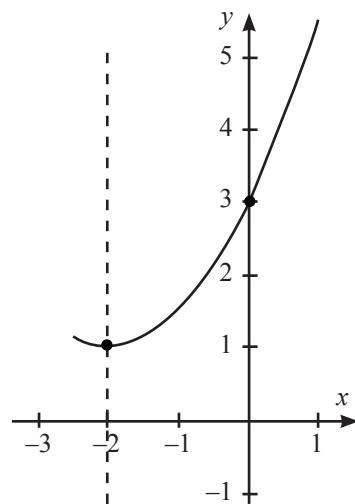
d. Karena titik puncak berada di (1, –4) maka diperoleh $f(1) = -4$.

$$f(1) = a(1 + 1)(1 - ...)$$

$$-4 = a \times ...$$

diperoleh $a = ...$ dan fungsi kuadrat $f(x) = ...$

Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ memiliki titik puncak pada titik koordinat (s, t) maka sumbu simetri fungsi kuadrat tersebut adalah garis

$$x = ...$$

4. Jika diketahui titik potong sumbu-y dan titik puncak

Perhatikan gambar di samping. Terdapat suatu fungsi kuadrat yang memotong sumbu-y di (0, 3). Titik puncak fungsi kuadrat tersebut berada di koordinat (–2, 1).

Apakah kamu sudah bisa menentukan fungsi kuadratnya dan bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Berdasarkan grafik di samping diperoleh sumbu simetri $x = -2$. Berdasarkan sifat simetri, jika titik (0, 3) dicerminkan terhadap garis $x = -2$ diperoleh koordinat ....

c. Sehingga grafikfungsi kuadrat tersebut melalui tiga titik koordinat yaitu

(0, 3), (–2, 1), dan ...

d. Dengan menggunakan cara seperti pada Sub-Kegiatan 3.1, diperoleh

$a = \ldots$, $b = \ldots$ dan $c = \ldots$

e. Sehingga didapatkan fungsi kuadrat $f(x) = \ldots$

Materi Esensi 2.4 Menentukan Fungsi Kuadrat

Untuk menentukan fungsi kuadrat diperlukan beberapa informasi, di antaranya sebagai berikut.

1. Beberapa titik koordinat yang dilalui fungsi kuadrat tersebut.
2. Titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu-x.
3. Titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu-y.
4. Titik puncak dan sumbu simetri.

Langkah pertama untuk mendapatkannya adalah dengan memisalkan fungsi kuadrat tersebut dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$. Berikut ini adalah langkah selanjutnya berdasarkan informasi-informasi di atas.

1. Jika diketahui beberapa titik koordinat yang lain.

   Jika fungsi kuadrat tersebut melalui koordinat (p, q), maka diperoleh $f(p) = q$.

2. Jika diketahui titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu-x.

   Jika fungsi kuadrat memotong sumbu-x di (p, 0) dan (q, 0) maka fungsi kuadrat tersebut dapat dituliskan menjadi $f(x) = a(x - p)(x - q)$.

3. Jika diketahui titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu-y.

   Jika fungsi kuadrat memotong sumbu-x di (0, r) maka diperoleh

   $$f(0) = r$$

   Dengan mensubstitusikan nilai 0 pada $f(x)$ diperoleh

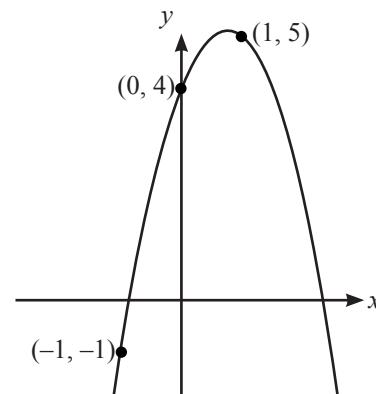
   $$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c.$$

   Sehingga diperoleh $c = r$.

4. Jika diketahui titik puncak dan sumbu simetri.

   Jika fungsi kuadrat kuadrat tersebut memiliki titik puncak di (s, t) maka diperoleh sumbu simetri fungsi kuadrat tersebut adalah garis

   $$x = s$$

Selanjutnya jika diketahui fungsi kuadrat tersebut melalui (e, d) maka dengan menggunakan sifat simetri diperoleh titik koordinat yang lain hasil pencerminan koordinat (e, d) terhadap garis $x = s$.

Contoh 1 Menentukan Fungsi Kuadrat I

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat (–1, –1), (0, 4) dan (1, 5).

Alternatif Penyelesaian:

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x)= ax^2 + bx + c$.

b. Karena melalui titik koordinat (–1, –1), (0, 4) dan (1, 5) diperoleh $f(-1) = -1$, $f(0) = 4$ dan $f(1) = 5$.

   - $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 4 \rightarrow c = 4$. Diperoleh

   $$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + 4}$$

- $f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 4 = -1 \rightarrow a - b + 4 = -1$. Diperoleh persamaan

$$\boldsymbol{a - b = -5} \quad \textbf{... (1)}$$

- $f(1) = a(1)^2 + b(1) + 4 = 5 \rightarrow a + b + 4 = 5$. Diperoleh persamaan

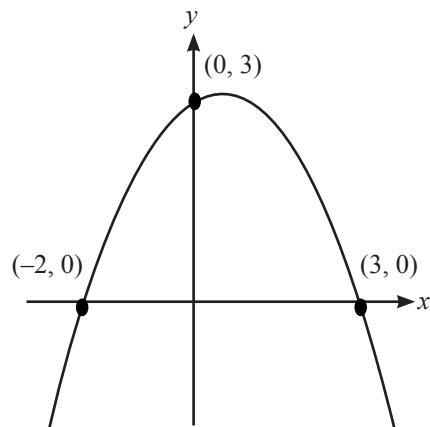
$$\boldsymbol{a + b = 1} \quad \textbf{... (2)}$$

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\boldsymbol{2a = -4 \rightarrow a = -2}$$

Kemudian $b = 1 - a = 1 - (-2) = 3$.

c. Diperoleh nilai $a = -2$, $b = 3$ dan $c = 4$, sehingga fungsi kuadratnya adalah

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

Contoh 2 Menentukan Fungsi Kuadrat II

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki titik potong sumbu-x pada titik koordinat (-2, 0) dan (3, 0) serta memotong sumbu-y pada koordinat (0, 3).

Alternatif Penyelesaian:

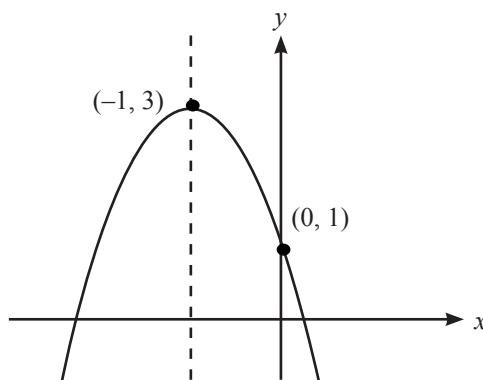
a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Karena memotong sumbu-x pada koordinat (–2, 0) dan (3, 0), fungsi kuadratnya dapat diubah menjadi

$$f(x) = a(x + 2)(x - 3).$$

c. Karena memotong sumbu-y pada koordinat (0, 3) diperoleh $f(0) = 3$

$$f(0) = a(0 + 2)(0 - 3) = -6a$$

Sehingga diperoleh $-6a = 3 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

d. Diperoleh fungsi kuadrat:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 6) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

Contoh 3 **Menentukan Fungsi Kuadrat III**

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki titik puncak pada titik koordinat (–1, 3) serta memotong sumbu-y pada titik koordinat (0, 1).

Alternatif Penyelesaian:

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Diperoleh sumbu simetri $x = -1$.

c. Berdasarkan sifat simetri, jika titik (0, 3) dicerminkan terhadap garis $x = -1$ diperoleh titik koordinat (–2, 1).

d. Fungsi kuadrat melalui tiga titik koordinat, yakni (0, 1), (–1, 3) serta (–2, 1).

e. Karena melalui titik koordinat (0, 1), (–1, 3) dan (–2, 1) diperoleh $f(0) = 1$, $f(-1) = 3$ dan $f(-2) = 1$.

- $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$. Diperoleh

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + 1}$$

- $f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 3 \Leftrightarrow a - b + 1 = 3$. Diperoleh persamaan

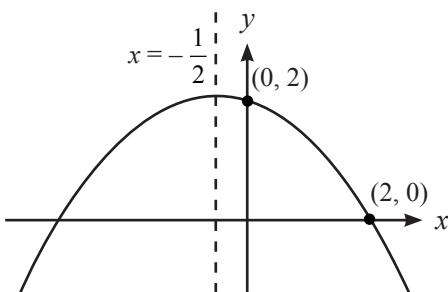
$$\boldsymbol{a - b = 2} \qquad \textbf{... (1)}$$

- $f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + 1 = 1 \Leftrightarrow 4a - 2b + 1 = 1$. Diperoleh persamaan

$$\boldsymbol{2a - b = 0} \qquad \textbf{... (2)}$$

Dengan mengurangi persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\boldsymbol{-a = 2 \Leftrightarrow a = -2}$$

Kemudian $b = 2a = 2(-2) = -4$.

f. Diperoleh nilai $a = –2$, $b = –4$ dan $c = 1$, sehingga fungsi kuadratnya adalah

$$f(x) = –2x^2 - 4x + 1$$

Contoh 4 Menentukan Fungsi Kuadrat

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki sumbu simetri $x = -\frac{1}{2}$ yang memotong sumbu-x pada titik koordinat (2, 0) dan memotong sumbu-y pada koordinat (0, 2).

Alternatif Penyelesaian:

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x)= ax^2 + bx + c$.

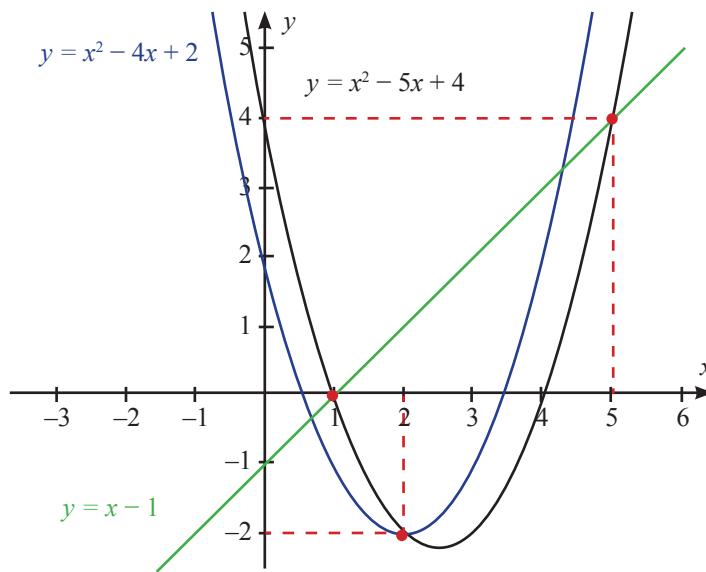
b. Berdasarkan sifat simetri, jika titik (2, 0) dicerminkan terhadap garis $x = -\frac{1}{2}$ diperoleh titik koordinat (–3, 0).

c. Karena memotong sumbu-x pada koordinat (2, 0) dan (–3, 0), fungsi kuadratnya dapat diubah menjadi

$$f(x) = a(x + 3)(x – 2).$$

d. Karena memotong sumbu-y pada koordinat (0, 2) diperoleh $f(0) = 2$

$$f(0) = a(0 + 3)(0 – 2) = –6a$$

Sehingga diperoleh $–6a = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

e. Diperoleh fungsi kuadrat

$$f(x) = -\frac{1}{3}\ (x + 3)(x - 2) = -\frac{1}{3}\ (x^2 + x - 6) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^2 + 2$$

Tahukah Kamu

Ketika kamu menggambar grafik fungsi linear dan grafik fungsi kuadrat (atau menggambar dua grafik fungsi kuadrat) dimungkinkan kedua grafik tersebut saling berpotongan.

Berdasarkan gambar di atas grafik fungsi linear $y = x - 1$ dan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 5x + 4$ berpotongan pada dua titik koordinat, yaitu (1, 0) dan (5, 4). Sedangkan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 5x + 4$ dan $y = x^2 - 4x + 2$ berpotongan pada satu titik koordinat, yaitu (2, –2).

Kamu juga dapat menentukan titik potongnya tanpa menggambar grafik. Caranya adalah dengan "**menyamakannya**".

1. Titik potong grafik fungsi linear dan fungsi kuadrat.

   Fungsi linear : $y = –x + 1$, fungsi kuadrat : $y = x^2 - 5x + 4$

   Dengan menyamakan kedua fungsi di atas diperoleh

   $$x^2 - 5x + 4 = x - 1$$

   $$x^2 - 5x + 4 - x + 1 = 0$$

   $$x^2 - 6x + 5 = 0$$

   $$(x - 1)(x - 5) = 0$$

   Sehingga $x = 1$ atau $x = 5$.

   Dari nilai x di atas kamu dapat memperoleh nilai y dengan mensubstitusikan nilai x pada salah satu fungsi.

   Untuk $x = 1 \Leftrightarrow y = x - 1 = 1 - 1 = 0$, diperoleh titik koordinat (1, 0).

   Untuk $x = 5 \Leftrightarrow y = x - 1 = 5 - 1 = 4$, diperoleh titik koordinat (5, 4).

   Jadi titik potongnya pada titik koordinat (1, 0) dan (5, 4).

2. Titik potong dua fungsi kuadrat.

   Fungsi kuadrat $f_1(x) = x^2 - 5x + 4$ dan $f_2(x) = x^2 - 4x + 2$

   Karena yang dicari titik potong maka $f_1(x) = f_2(x)$, selanjutnya didapatkan

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 - 4x + 2$$
$$x^2 - 5x + 4 - (x^2 - 4x + 2) = 0$$
$$-x + 2 = 0$$

   Diperoleh $x = 2$.

   Dari nilai x di atas kamu dapat memperoleh nilai y dengan mensubstitusikan nilai x pada salah satu fungsi.

   Untuk $x = 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 5x + 4 = (2)^2 - 5(2) + 4 = -2$, diperoleh titik koordinat (2, –2).

   Jadi titik potongnya pada titik koordinat (2, –2).

1. Untuk suatu bilangan bulat $p > q > 0$, apakah terdapat suatu fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ yang melalui titik koordinat $(1, p)$ dan $(1, q)$?

   Jelaskan alasanmu.

2. Untuk suatu bilangan bulat $p > q > r > 0$, apakah terdapat suatu fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ yang melalui titik koordinat $(2, p)$, $(2, p)$ dan $(2, r)$?

   Jelaskan alasanmu.

3. Apakah mungkin grafik fungsi linear dan grafik fungsi kuadrat berpotongan di tiga titik koordinat berbeda?

   Jelaskan alasanmu.

4. Apakah mungkin dua grafik fungsi kuadrat berpotongan di tiga titik koordinat berbeda?

Latihan 2.4 Menentukan Fungsi Kuadrat

1. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat (–1, 1), (0, –4), dan (1, –5).

2. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu-x pada titik koordinat (4, 0) dan (–3, 0) serta melalui titik koordinat (2, –10).

3. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu-x pada koordinat (–2, 0) dan memiliki titik puncak pada koordinat (2, –16).

4. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu-y pada koordinat (0, 4), melalui titik koordinat (–1, –1) dan memiliki sumbu simetri $x = 2$.

5. **Tantangan**. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui (12, 0), (0, 3), dan (0, –2).

6. Untuk suatu bilangan bulat p, tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat (p, 0) dan (–p, 0), dan (0, p).

7. Tentukan semua titik potong grafik fungsi linear $y = x - 1$ dengan fungsi kuadrat $y = x^2 - 5x + 4$.

8. Tentukan semua titik potong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 6x + 4$ dengan fungsi kuadrat $y = x^2 - 8x$.

9. **Tantangan**. Tentukan nilai a dan b agar grafik fungsi linear $y = ax + b$ memotong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 2$ tepat pada satu titik koordinat yakni (3, –1). (Kalau diperlukan dapat menggunakan grafik).

10. Dari fungsi kuadrat $y = 2x^2 - 12x + 16$ akan dibuat suatu segitiga. Titik-titik sudut segitiga tersebut merupakan titik potong sumbu-x dan titik puncak. Tentukan luas segitiga tersebut.

2.5 Aplikasi Fungsi Kuadrat

Pada sub-bab ini kamu akan mempelajari beberapa aplikasi fungsi kuadrat dalam kehidupan sehari-hari.

Bagaimana aplikasi fungsi kuadrat pada kehidupan nyata?

Kegiatan 1 Lompat Trampolin

Lompat trampolin adalah sebuah permainan yang membuat seseorang terlemparkan ke udara dengan menggunakan trampolin **seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini**. Pada suatu hari diadakan suatu kompetisi lompat trampolin dengan peserta lompatan tertinggi akan keluar menjadi pemenang. Untuk menentukan tinggi lompatan, panitia menyiapkan suatu alat ukur berupa penggaris dengan ukuran 5 meter yang dipasang secara vertikal di sebelah trampolin sehingga tinggi dari lompatan peserta bisa dilihat dari penggaris ini. Namun dengan menggunakan metode ini panitia mengalami masalah yaitu ketika ada peserta yang lompatannya melebihi 5 meter. Untuk menyelesaikan hal ini lakukanlah kegiatan di bawah ini sebagai simulasi.

Sumber: http://www.sekolah123.com

1. Siapkan penggaris berukuran 100 cm atau 30 cm.
2. Siapkan stop watch atau jam tangan atau jam dinding.
3. Siapkan koin atau benda kecil yang bisa dilempar ke atas.
4. Buatlah kelompok minimal terdiri atas tiga orang yang akan bertugas untuk melempar koin, mengamati uji coba, dan mencatat.
5. Letakkan penggaris secara vertikal dan bilangan nol letakkan pada posisi di bawah.

6. Lemparlah koin atau benda kecil yang kamu siapkan dengan posisi lemparannya di titik nol pada penggaris.
7. Amati waktu yang diperlukan koin untuk mencapai tinggi 100 cm atau 30 cm (sesuaikan dengan penggaris yang kamu bawa).
8. Lakukan kegiatan ini sebanyak 10 kali dan isi tabel berikut ini.

Percobaan ke-	Waktu yang diperlukan untuk mencapai 100 cm atau 30 cm
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	

Pada teori fisika terdapat persamaan yang berhubungan dengan kegiatan di atas, yaitu $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ dengan h menyatakan tinggi benda, v_0 menyatakan kecepatan awal atau kecepatan disaat waktu sama dengan nol, t menyatakan waktu dan g menyatakan koefisien dalam gaya gravitasi yang bernilai 9,8. Dari kegiatan di atas informasi apa saja yang bisa kamu dapat tentukan dan beri penjelasannya?

Tentukan hubungan antara Kegiatan 1 dengan permasalahan panitia lompat trampolin di atas. Dan bagaimana pemecahan masalahnya.

Kegiatan 2 Membuat Balok

Seorang pengusaha es ingin membuat cetakan untuk es. Untuk itu dia menyediakan selembar kayu berukuran 2,5 meter × 1 meter. Dengan kayu ini dia ingin membentuk cetakan berbentuk balok dengan tinggi 1 meter tanpa alas dan tutup. Sebagai pengusaha dia ingin menghasilkan es semaksimal mungkin. Selesaikan permasalahan ini dengan melakukan kegiatan berikut.

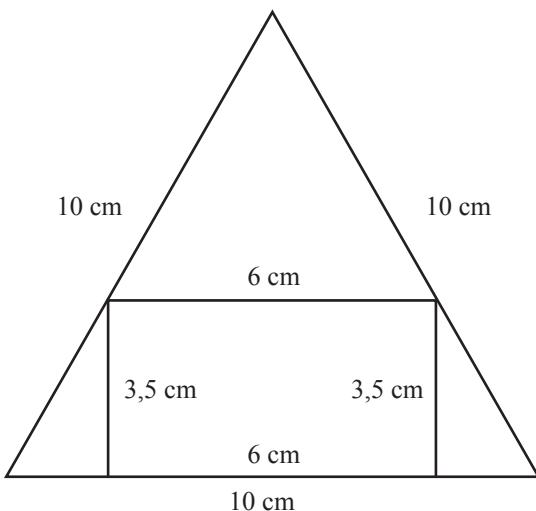
1. Siapkan kertas karton berukuran 25 cm × 10 cm.
2. Buatlah balok atau kubus tanpa alas dan tutup dengan tinggi 10 cm dari kertas tersebut dengan cara melipat seperti pada contoh gambar berikut ini.

Sumber: *Dokumen Kemdikbud*

3. Hitunglah volume balok yang kamu buat.
4. Lakukan kegiatan ini sebanyak sepuluh kali dengan menggunakan kertas yang sama, tetapi ukuran baloknya berbeda.

5. Isilah tabel berikut ini.

Balok ke-	Volume balok
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	

Dari kesepuluh balok yang kamu buat, balok nomor berapakah yang mempunyai volume terbesar? Mungkinkah dibuat balok lain dengan volume lebih besar daripada volume balok tersebut?

Tentukan hubungan hasil dari Kegiatan 2 di atas dengan kasus yang ada pada Kegiatan 2 ini. Bagaimana kamu menyelesaikan kasus yang dihadapi oleh pengusaha tersebut?

Kegiatan 3 Membuat Persegi Panjang

Seorang pengusaha emas mendapatkan pesanan 10 lempeng emas berbentuk segitiga sama sisi dengan ukuran sisinya adalah 10 cm dengan harga Rp100.000 per cm^2. Akibat dari produksi ini, bahan untuk pembuatan emas yang dia miliki telah habis. Selanjutnya ternyata ada kabar yang mengejutkan yaitu si pembeli tidak ingin membeli emas berbentuk segitiga namun dia ingin membeli emas berbentuk persegi panjang sebanyak 10 dengan ukuran yang sama dan dia akan membayarnya dengan harga dua kali lipat dari harga Rp200.000 per cm^2. Karena bahannya sudah habis maka si pengusaha harus memotong emas berbentuk segitiga menjadi persegi panjang. Karena si pengusaha menginginkan hasil penjualan emas tersebut semaksimal mungkin, dia harus membuat emas berbentuk persegi panjang dengan luas maksimal. Selesaikan permasalahan ini dengan melakukan kegiatan berikut.

1. Siapkan kertas karton.
2. Buatlah segitiga sama sisi dengan ukuran sisi 10 cm.
3. Buatlah persegi panjang di dalam segitiga tersebut, seperti pada gambar di atas.
4. Hitunglah luas dari persegi panjang tersebut.
5. Lakukan kegiatan ini sebanyak sepuluh kali.

6. Isilah tabel berikut ini

Persegi Panjang ke-	Luas Persegi Panjang
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	

Ayo Kita Menalar

Dari kesepuluh persegi panjang yang kamu buat, persegi panjang nomer berapakah yang mempunyai luas terbesar? Mungkinkah dibuat persegi panjang yang lain dengan luas lebih besar daripada luas persegi panjang tersebut? Hubungkan hasil dari Kegiatan 3 ini dengan kasus yang ada pada Kegiatan 3 ini! Bagaimana kamu menyelesaikan kasus yang dihadapi oleh pengusaha tersebut?

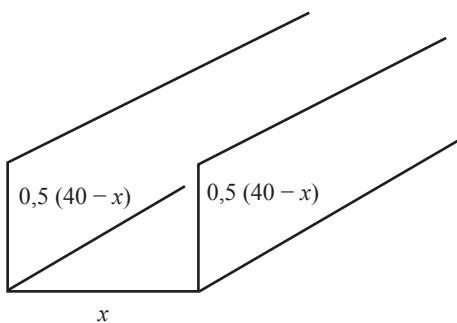
Carilah aplikasi fungsi kuadrat yang ada pada kehidupanmu sehari-hari, lalu presentasikan di depan kelas.

Buatlah pertanyaan dari hasil diskusi di atas.

Materi Esensi 2.5

Aplikasi Fungsi Kuadrat

Berikut langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah optimalisasi fungsi kuadrat.

Langkah 1. Tentukan variabel yang akan dioptimalisasi yaitu y dan variabel yang bebas yaitu x.

Langkah 2. Jika model $y = ax^2 + bx + c$ tidak diketahui maka bentuklah model $y = ax^2 + bx + c$ dari permasalahan.

Langkah 3. Tentukan nilai optimum dari model yang didapatkan pada Langkah 2.

Contoh 1

Tukang Talang Air

Pekerjaan Pak Suradi adalah pembuat Talang Air. Ia mendapat pesanan membuat sebuah Talang Air dari lembaran seng yang lebarnya 40 cm dengan cara melipat lebarnya atas tiga bagian seperti terlihat pada **Gambar di bawah ini**. Tentukan nilai x supaya volume dari talang maksimum.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : Lembaran seng yang lebarnya 40 cm akan dibuat talang seperti **gambar di atas**.

Ditanya : Ukuran talang supaya volumenya maksimum

Penyelesaian:

Langkah 1. Menentukan variabel yang akan dioptimalisasi yaitu y dan variabel yang bebas yaitu x

Variabel y dalam kasus ini adalah luas sisi talang dan variabel x seperti terlihat pada gambar

Langkah 2. Model permasalahan ini adalah $y = x\ (0{,}5(40 - x)) = 20x - \frac{1}{2}x^2$ yakni

$$a = -\frac{1}{2},\ b = 20 \text{ dan } c = 0$$

Langkah 3. Agar y optimum maka nilai x adalah $-\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -20\,cm$.

Contoh 2 **Tinggi Balon Udara**

Tinggi dari balon udara dalam waktu x dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x) = -16x^2 + 112x - 91$. Tentukan tinggi maksimum balon udara.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : Fungsi $f(x) = -16x^2 + 112x - 91$ merupakan tinggi balon udara

Ditanya : Tinggi maksimum balon udara

Penyelesaian :

Langkah 1. Tentukan variabel yang akan dioptimalisasi; yaitu, y dan variabel yang bebas; yaitu x

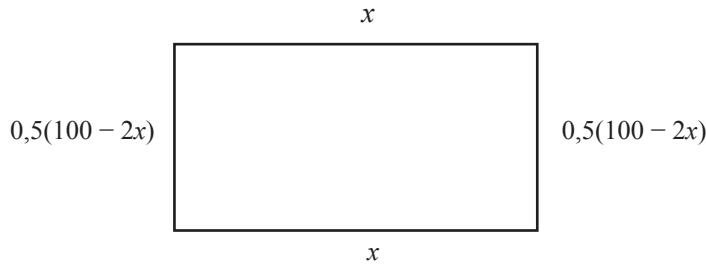
Variabel y dalam kasus ini adalah $f(x)$; yaitu fungsi tinggi balon

Langkah 2. Model $f(x) = -16x^2 + 112x - 91$

Langkah 3. Tinggi maksimum

$$y_o = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(112)^2 - 4(-16)(-91)}{4(-16)} = -\frac{6720}{-64} = 105 \text{ meter}$$

Contoh 3 **Luas Kebun**

Seorang tukang kebun ingin memagari kebun yang dia miliki. Dia hanya bisa memagari kebun dengan keliling 100 m. Jika pagar yang diinginkan berbentuk persegi panjang, Berapa luas maksimum kebun yang bisa dipagari?

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : Diketahui keliling kebun yang akan dipagari 100 meter

Ditanya : Luas maksimum kebun yang akan dipagari

Penyelesaian:

x

$0{,}5(100 - 2x)$ $\qquad$ $0{,}5(100 - 2x)$

x

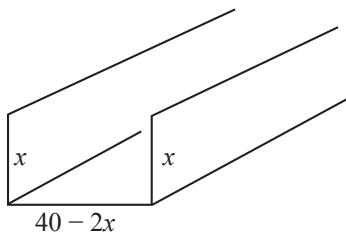
Berdasarkan yang diketahui yaitu keliling adalah 100 dan dimisalkan x panjang persegi panjang maka kebun tersebut dapat digambar seperti di atas.

Langkah 1. Menentukan variabel yang akan dioptimalisasi yaitu y dan variabel yang bebas yaitu x

Variabel y dalam kasus ini adalah luas persegipanjang pada **gambar di atas**.

Langkah 2. Model dalm kasus ini adalah $y = x(0{,}5(100 - 2x)) = 50x - x^2$

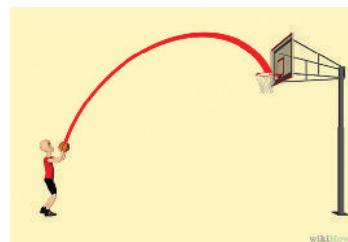
Langkah 3. Luas maksimum

$$y_o = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(50)^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)} = -\frac{2500}{-4} = 625\,meter$$

Berdasarkan contoh di atas, tuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah optimalisasi fungsi kuadrat.

1. Pada Contoh 1, bagaimana ukuran talang jika bentuk gambarnya sebagai berikut? Apakah menghasilkan hal yang sama?

2. Pada Contoh 2, bagaimana jika $f(x) = -16x^2 + 112x - 111$? Apa yang terjadi? Bagaimana hal itu bisa terjadi? Jelaskan?

Latihan 2.5

Aplikasi Fungsi Kuadrat

1. Suatu persegi panjang kelilingnya 60 cm. Tentukan ukuran persegi panjang agar mempunyai luas maksimum.

2. Sebuah segitiga siku-siku jumlah kedua sisi siku-sikunya adalah 50 cm. Tentukan ukuran segitiga siku-siku agar mempunyai luas maksimum.

3. Seorang siswa memotong selembar kain. Kain hasil potongannya berbentuk persegi panjang dengan keliling 80 cm. Apabila siswa tersebut berharap mendapatkan kain hasil potongan mempunyai luas maksimum, tentukan panjang dan lebar kain.

4. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas. Tinggi peluru h (dalam meter) sebagai fungsi waktu t (dalam detik) dirumuskan dengan $h(t) = -4t^2 + 40t$. Tentukan tinggi maksimum yang dapat dicapai peluru dan waktu yang diperlukan.

5. Diketahui bahwa tinggi Jam Gadang yang ada di Sumatera adalah 26 meter. Tentukan pemecahan masalah berikut ini: (Petunjuk: Rumus fisika untuk benda yang dijatuhkan pada ketinggian tertentu adalah $s = s_0 - v_0 t + 5t^2$ dan untuk benda yang dilempar ke atas adalah $h = h_0 + v_0 t - 5t^2$ dengan s adalah jarak benda yang dijatuhkan terhadap posisi awal benda (meter), h adalah jarak benda yang dilempar terhadap posisi awal benda (meter), t adalah waktu (detik), s_0 dan h_0 adalah ketinggian awal, dan v_0 adalah kecepatan awal benda (m/s))

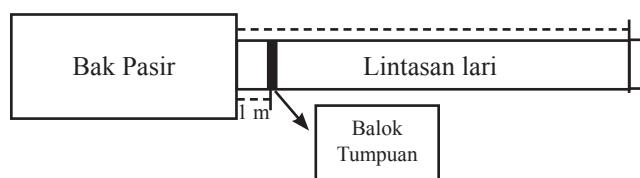
Sumber: www.indonesia.travel

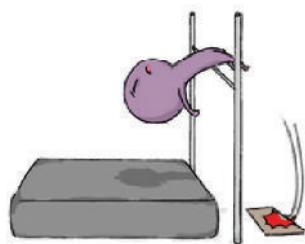
   a. Pada suatu hari ada seseorang yang menjatuhkan apel dari atas gedung Jam Gadang. Jika diharapkan apel tiba di tanah pada 0,7 detik setelah pelemparan apel, tentukan kecepatan awal apel.

   b. Pada suatu hari ada seseorang yang melempar apel ke atas. Jika orang tersebut menginginkan tinggi lemparannya tersebut tepat sama dengan tinggi gedung Jam Gadang. Tentukan kecepatan awal yang harus diberikan orang tersebut pada saat melempar apel.

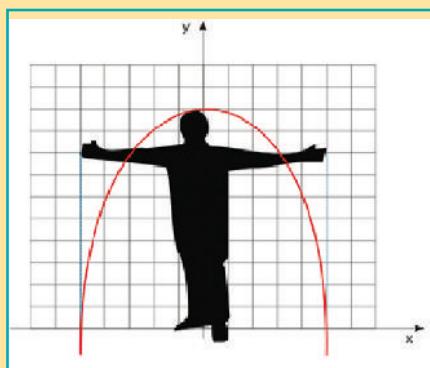
6. Seorang pemain bola basket mempunyai tinggi 170 cm. Sedangkan tinggi keranjang adalah 3 meter. Pemain basket tersebut melempar bola basket sejauh 4 meter dari posisi tiang keranjang dan posisi awal bola berada tepat di atas kepala pemain. Ternyata lemparannya mempunyai tinggi maksimum 4,5 meter dan secara horisontal berjarak 2,5 meter dari pemain. Jika lemparannya membentuk parabola tentukan apakah bola tersebut masuk kedalam keranjang?

Sumber: http://www.wikihow.com

7. Seorang tukang bangunan mendapat pesanan membuat air mancur yang diletakkan di pusat kolam kecil yang berbentuk lingkaran. Pemesan menginginkan luas kolamnya adalah 10 m^2. Jika tinggi maksimum dari air mancur adalah 2 meter dan air mancurnya harus jatuh tepat ditepian kolam maka tentukan persamaan kuadrat dari air mancur.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

8. Seorang atlet lompat jauh sedang mengadakan latihan. Pada saat latihan dia mengambil awalan lari dengan kecepatan tertentu dan pada saat di balok tumpuan kecepatannya kira-kira 2.5 m/s kemudian pada saat itu juga dia melompat dengan sudut 30^0. Tentukan jarak atlet tersebut dengan balok tumpuan ketika dia sampai ditanah? (Petunjuk: Rumus fisika untuk jarak vertikal (tinggi) yang bergantung terhadap waktu dengan sudut awal 30^0 adalah $h = \frac{1}{2} v_0\, t - 5t^2$ dan jarak horisontal yang bergantung pada waktu adalah $s = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, v_0\, t$ dengan t adalah waktu (detik), h adalah tinggi lompatan pada saat t (m), s adalah jarak horisontal pada saat t (m) dan v_0 adalah kecepatan awal)

Sumber: elgisha.wordpress.com

9. Seorang atlet lompat tinggi sedang mengadakan latihan. Pada saat latihan dia mengambil awalan lari dengan kecepatan tertentu dan dia melompat dengan sudut mendekati 90^0 pada saat jaraknya sangat dekat sekali dengan tiang lompat. Satu detik setelah dia melompat, tubuhnya mencapai tanah. Tentukan kecepatan lari sesaat sebelum dia melompat supaya lompatannya bisa melewati tinggi mistar lompat yaitu 2 meter! (Petunjuk: Rumus fisika untuk tinggi yang bergantung terhadap waktu dengan sudut awal lompatan mendekati 90^0 adalah $h = \frac{1}{2} v_0 t - 5t^2$ dengan t adalah waktu (detik), h adalah tinggi lompatan pada saat t (m) dan v_0 adalah kecepatan awal)

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Proyek 2

Ukurlah tinggi badanmu (h) dan panjang jangkauan kedua tanganmu (j). Nyatakan keduanya dalam satuan cm. Tugasmu adalah membuat fungsi kuadrat berdasarkan informasi tinggi dan jangkauan tangan tanganmu sebagai berikut.

1. Grafik fungsi kuadrat tersebut memiliki titik puncak pada koordinat $(0, h)$.
2. Grafik fungsi kuadrat tersebut memotong sumbu-x pada koordinat

$$(\frac{j}{2}, 0)\ dan\ (-\frac{j}{2}, 0)$$

Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Uji Kompetensi 2 — Fungsi Kuadrat

1. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan $x^2 - 5x - 1 = 0$, tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $2p + 1$ dan $2q + 1$.

2. Diketahui akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + 1 = 0$ adalah m dan n. Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $m + n$ dan $m.n$.

3. Persamaan $2x^2 + qx + (q - 1) = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Jika $x_1^2 + x_2^2 = 4$, tentukan nilai q!

4. Persamaan$(1 - m)x^2 + (8 - 2m)x + 12 = 0$ mempunyai akar kembar. Berapa m?

5. Jika nilai diskriminan persamaan kuadrat $2x^2 - 9x + c = 0$ adalah 121, tentukan nilai c.

6. Jumlah dua bilangan cacah adalah 12. Jika hasil kali dua bilangan itu 35, tentukan kedua bilangan cacah yang dimaksud.

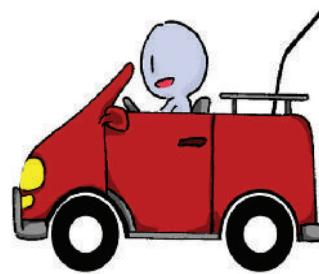
7. Persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 7 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $x_1 - 2$ dan $x_2 - 2$ adalah ....

8. Akar-akar persamaan $2x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$ adalah α dan β . Jika $\alpha = 2\beta$, maka nilai m adalah ....

9. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan $x^2 - 5x - 1 = 0$, maka persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $2p + 1$ dan $2q + 1$ adalah ....

10. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + (a - 1)x + 2 = 0$ adalah α dan β. Jika $\alpha = 2\beta$ dan $a > 0$, tentukan nilai a.

11. Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.
    a. $f(x) = x^2 + x + 3$
    b. $f(x) = x^2 - 6x + 8$
    c. $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

12. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu-x pada titik koordinat $(-2, 0)$ dan $(5, 0)$ serta memotong sumbu-y pada titik koordinat $(0, -20)$.

13. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki titik puncak pada titik koordinat (1, 5) serta melalui titik koordinat (0, 7).

14. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat (0, 5), (1, 6) dan (–1, 12).

15. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat (0, –2) serta memiliki sumbu simetri $x = -\frac{1}{2}$.

16. **Analisis kesalahan**. Lily menentukan fungsi kuadrat yang memiliki akar $x = 3$ dan $x = -2$ serta grafiknya melalui titik koordinat (0, 12). Fungsi kuadrat yang diperoleh adalah $y = -2x^2 - 2x + 12$. Tentukan kesalahan yang dilakukan oleh Lily.

17. **Tantangan**. Tentukan banyaknya fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ yang memiliki dua akar berbeda dengan $1 \leq a, b, c \leq 6$.

18. Tentukan titik potong grafik fungsi linear $y = 2x + 5$ dengan grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 - 4x + 9$.

19. Tentukan titik potong grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 + 4x + 1$ dengan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + 9x + 7$.

20. **Tantangan**.Apakah mungkin garis horisontal memotong grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ tepat pada satu titik koordinat?

21. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi di bawah ini.

    a. $y = 3x^2 - 7x$

    b. $y = 8x^2 - 16x + 2$

    c. $y = 6x^2 + 20x + 18$

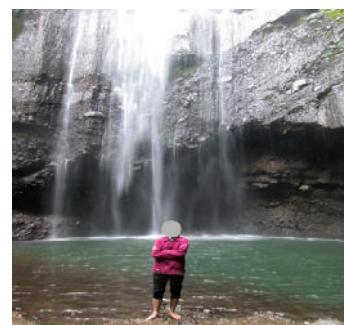
22. Sketsalah grafik fungsi berikut ini.

    a. $y = 6x^2 + 5x + 7$

    b. $y = 7x^2 - 3x + 2$

23. Diketahui suatu barisan 3, 11, 26,…. Suku ke-n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukan barisan ke-100.

24. Diketahui suatu barisan barisan 5, 19, 29,…. Suku ke-n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukan nilai maksimum dari barisan tersebut.

25. Jika fungsi $y = ax^2 + 3x + 5a$ mempunyai nilai maksimum 0, maka tentukan a.

26. Seorang sopir mengemudikan mobilnya dengan kecepatan konstan 20 m/s. Tiba-tiba dia melihat orang yang sedang berdiri di tengah jalan yang berjarak 15 m di depan mobilnya. Sopir tersebut mengerem mobilnya dengan perlambatan 5 m/s^2. Apakah mobil tersebut menabrak orang didepannya itu? (Petunjuk: rumus fisika untuk kasus ini adalah $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ dengan t menyatakan waktu (detik) mulai dari pengereman, s jarak tempuh pada saat t, v_0 menyatakan kecepatan mobil dan a menyatakan perlambata mobil)

Sumber: Dokumen Kemdikbud

27. Air Terjun Madakaripura terletak di Kecamatan Lumbang, Probolinggo merupakan salah satu air terjun di kawasan Taman Nasional Bromo Tengger Semeru. Tinggi dari air terjun ini adalah 200 m. Pada suatu hari ada seseorang yang melepas ikan tepat dari atas air terjun. Tentukan berapa waktu yang diperlukan ikan tersebut untuk mencapai dasar air terjun? Jika persamaan jarak tempuh dari ikan tersebut adalah $y = y_0 - 24t^2$ dengan y jarak tempuh, y_0 adalah tinggi air terjun dan t waktu tempuh.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

28. Sebuah roket mempunyai dua bahan bakar yaitu salah satunya berada pada pada bagian ekor. Pada ketinggian tertentu bahan bakar ini akan dibuang untuk mengurangi bobot. Roket mempunyai rumusan suatu persamaan $y = 300t - 5t^2$ dengan t adalah waktu (detik) dan y menyatakan tinggi roket. Jika ekor roket dibuang pada saat mencapai tinggi maksimum, berapa tinggi roket pada saat membuang bahan bakarnya?

Sumber: http://idkf.bogor.net

29.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Seorang atlet tolak peluru mempunyai tinggi 160 cm. Atlet ini melempar peluru tepat di atas kepalanya. Ternyata lemparannya mempunyai tinggi maksimum 4,5 meter dan secara horisontal berjarak 2,5 meter dari pemain. Jika lemparannya membentuk parabola tentukan jarak yang dicapai peluru tersebut!

30. *Sumber: http://cdn.ad4msan.com*

Balon udara jatuh dari ketinggian 32 kaki. Diberikan fungsi $h = -32\,t^2 + 32$ dengan h adalah tinggi balon setelah t detik. Kapan balon ini mencapai tanah?

Bab III

Transformasi

Kata Kunci

- *Refleksi*
- *Translasi*
- *Rotasi*
- *Dilatasi*

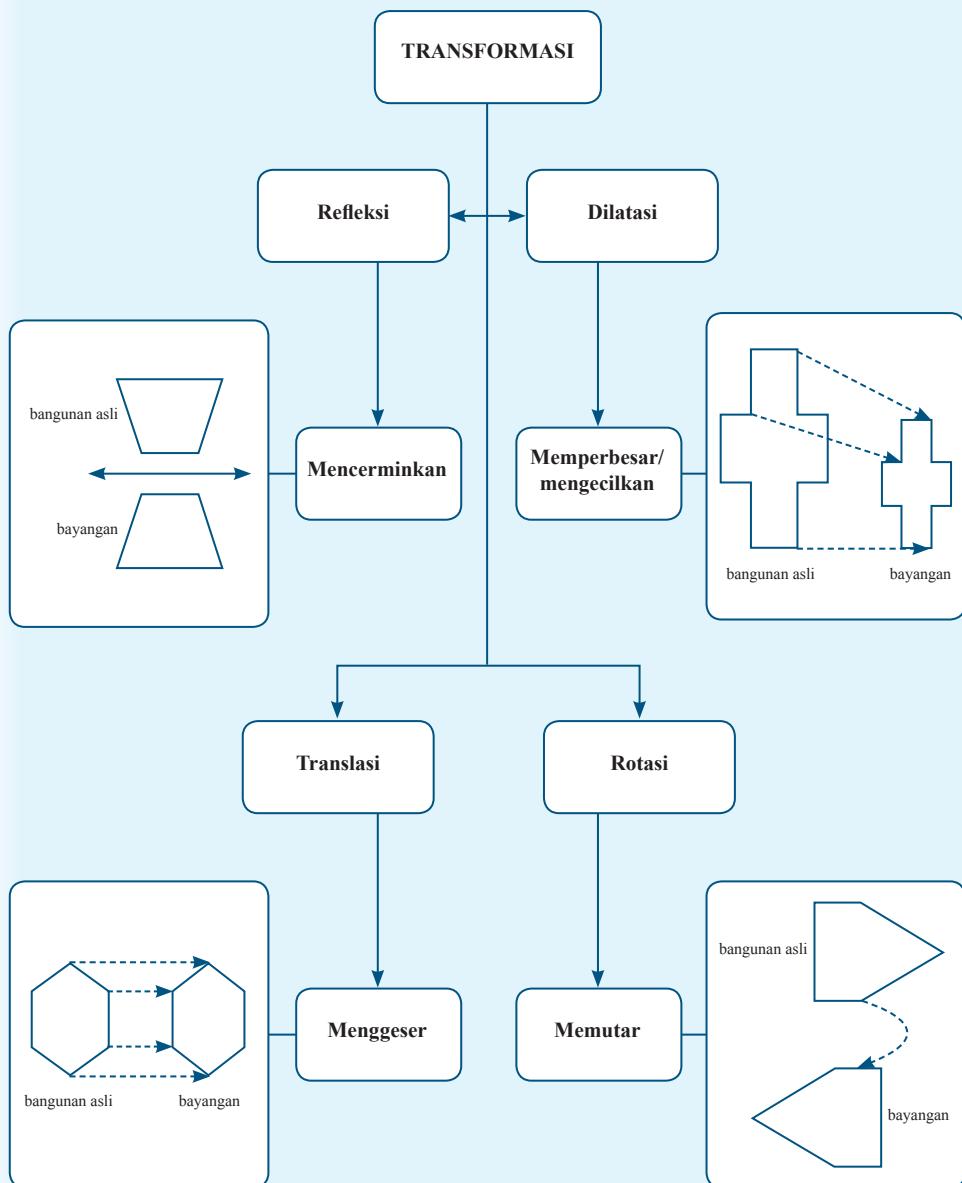
Kompetensi Dasar

3.5 *Menjelaskan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi) yang dihubungkan dengan masalah kontekstual.*

4.5 *Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi).*

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Apakah kalian pernah memindahkan atau menggeser suatu benda dari suatu tempat ke tempat lainnya? Ketika kalian memindahkan suatu benda ke tempat lain maka bentuk benda tetaplah seperti semula, hanya saja posisi dari benda telah berubah dari posisi awalnya.Apakah kalian pernah memperhatikan bentuk dari bayangan kalian saat bercermin? Bagaimana caramu untuk menggambar bayangan benda hasil suatu pencerminan?

Pernahkah kamu memperhatikan suatu roda sepeda yang sedang berputar searah maupun berlawanan dengan jarum jam? Apakah roda sepeda tersebut sedang berotasi? Hal-hal apa saja yang mempengaruhi rotasi suatu benda? Apakah kamu mengetahui apa itu dilatasi pada suatu benda? Faktor apa saja yang mempengaruhi dilatasi? Kamu akan mengetahui jawaban dari setiap pertanyaan dan permasalahan tersebut dengan menggunakan transformasi geometri. Konsep mengenai transformasi pada benda akan kita pelajari bersama di Bab 3 ini.

Pengalaman Belajar

1. *Menggambar bayangan benda hasil refleksi pada cermin.*
2. *Mengenali garis simetri serta menentukan banyak simetri lipat suatu benda.*
3. *Menggambar bayangan benda hasil transformasi (refleksi, translasi, rotasi, atau dilatasi).*
4. *Menentukan koordinat bayangan benda hasil transformasi (refleksi, translasi, rotasi, atau dilatasi) pada koordinat kartesius.*
5. *Menentukan pasangan bilangan translasi yang menggerakkan bangun datar maupun titik pada koordinat kartesius.*
6. *Menentukan apakah dilatasi merupakan pembesaran atau pengecilan.*
7. *Menentukan faktor skala untuk dilatasi yang diberikan.*
8. *Menggambar dan menentukan koordinat bayangan hasil transformasi berulang.*
9. *Menerapkan transformasi dalam masalah nyata (seni dan alam).*

Peta Konsep
TRANSFORMASI
Refleksi
Dilatasi
bangunan asli
bayangan
Mencerminkan
Memperbesar/
mengecilkan
bangunan asli
bayangan
Translasi
Rotasi
bangunan asli
bayangan
Menggeser
Memutar
bangunan asli
bayangan

Sumber: https://en.wikipedia.org/wiki/Alhazen

Ibnu al-Haytham

Ibnu al-Haytham adalah salah satu saintis besar yang hidup antara tahun 965-1038 M, tepatnya lahir pada 1 Juli 965 di Bashra, Irak. Nama lengkapnya Abū ʿAlī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham. Masyarakat barat mengenalnya dengan nama Alhazen. Ibn al-Haytham hidup di masa Daulah Abbasiyah, salah satu dinasti muslim besar yang pernah berkuasa di Timur Tengah hingga Eropa.

Alhazen seorang *prolific* tulen. Karyanya mencapai lebih dari 185 buah, ia juga seorang *polymath* sejati sebab karyanya meliputi berbagai bidang keilmuan seperti matematika, fisika, astronomi, metafisika, anatomi tubuh, akuntansi hingga kaligrafi. Namanya sering dikaitkan dengan *camera obscura* yang merupakan cikal bakal kamera saat ini. Ia memperkenalkan nama bagian-bagian mata yang kita kenal melalui terjemah Latinnya seperti *vitreous humour*, *aqueous humour*, retina, kornea, dan lain-lain. Ia meredakan polemik beratus tahun lamanya tentang teori penglihatan, memunculkan permasalahan klasik dalam matematika di mana dunia mengenalnya dengan *Alhazen's Problem* yang baru dapat dipecahkan secara eksak pada 1997 oleh matematikawan Oxford Peter Neumann.

Karya Ibnu al-Haytham di bidang optik pada masa itu seakan melampaui jaman. Dari eksperimen yang dilakukan, Ibn al-Haytham berkesimpulan bahwa cahaya merambat lurus. Ia mengembangkan konsep pemantulan pada cermin parabolik. Ia juga melakukan eksperimen untuk pembiasan. Konvensi "sudut datang" dan "sudut bias" adalah temuannya, dan hingga kini masih digunakan dalam hukum pembiasan Snellius. Ibn al-Haytham jugalah yang menyatakan bahwa ketika cahaya memasuki suatu medium yang lebih rapat, cahaya tersebut bergerak lebih lambat. Pendapatnya tentang pembiasan itu digunakannya untuk menjelaskan fenomena fajar/senja, dengan menyatakan bahwa fajar/senja terjadi karena matahari berada di bawah ufuk (horizon) sehingga cahayanya dibiaskan oleh atmosfer. Karya Ibnu al-Haytham dalam bidang optik ini berkaitan erat dengan salah satu aplikasi matematika di bidang transformasi geometri, yaitu refleksi.

Sumber: Buku Ibn al-Haytham Sang Pembawa Cahaya Sains (Usep Muhamad Ishaq), Wikipedia.

Hikmah yang bisa diambil

1. Kita harus terus berusaha untuk mencapai keberhasilan.
2. Kita harus mau dan mampu melakukan pembuktian-pembuktian tentang fenomena alam sekitar yang merupakan bukti kekuasaan Tuhan melalui keilmuan yang diketahui manusia.

3.1 Pencerminan (Refleksi)

Pertanyaan Penting

Bagaimana caramu untuk menggambar bayangan hasil pencerminan suatu benda? Bagaimana caramu menentukan koordinat bayangan hasil pencerminan pada koordinat kartesius? Supaya kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan di atas lakukanlah kegiatan-kegiatan di bawah ini.

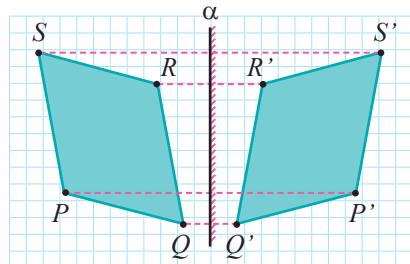
.

Kegiatan 1 Pencerminan Suatu Benda

Ketika melihat foto bangunan di samping, maka kamu akan melihat bayangan dari bangunan tersebut pada permukaan air. Perhatikan bahwa setiap titik dari bangunan asli di atas garis air memiliki titik yang bersesuaian dengan bayangannya pada air. Jarak dari semua titik pada bangunan asli ke permukaan air sama besarnya dengan jarak dari bayangan titik tersebut ke permukaan air. Bayangan dari bangunan tersebut pada air dikenal dengan **refleksi** (**pencerminan**) bangunan pada air.

Sumber: https://pixabay.com

Gambar 3.1 Foto Pencerminan Bangunan pada Air

Refleksi atau pencerminan merupakan salah satu jenis transformasi yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang (atau bangun geometri) dengan menggunakan sifat benda dan bayangannya pada cermin datar. Perhatikan gambar di bawah.

Apakah kamu ingat saat bercermin? Pada saat mendekati cermin, tampak bayanganmu juga akan mendekati cermin. Ketika kamu bergerak menjauhi cermin, bayanganmu juga akan menjauhi cermin.

Sifat bayangan benda yang dibentuk oleh pencerminan di antaranya sebagai berikut.

- Bayangan suatu bangun yang dicerminkan memiliki bentuk dan ukuran yang sama dengan bangun aslinya.
- Jarak bayangan ke cermin sama dengan jarak benda aslinya ke cermin.
- Bayangan bangun pada cermin saling berhadapan dengan bangun aslinya.

Gambar di samping merupakan contoh pencerminan (refleksi) dari segi empat *PQRS* terhadap garis α sehingga menghasilkan bayangan yaitu segi empat *P'Q'R'S'*.

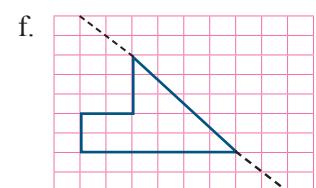
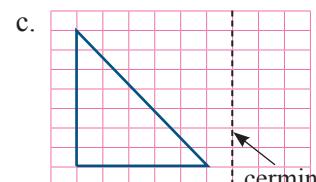
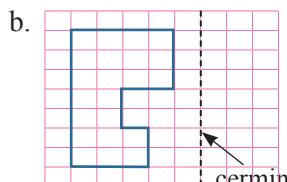
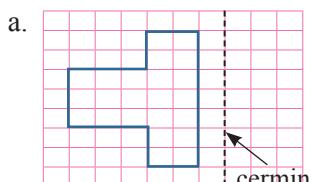
Berikut ini merupakan langkah-langkah untuk menggambar bayangan hasil refleksi segi empat *PQRS* terhadap garis α.

Langkah 1 Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap garis α dari *P*, *Q*, *R*, dan *S*.

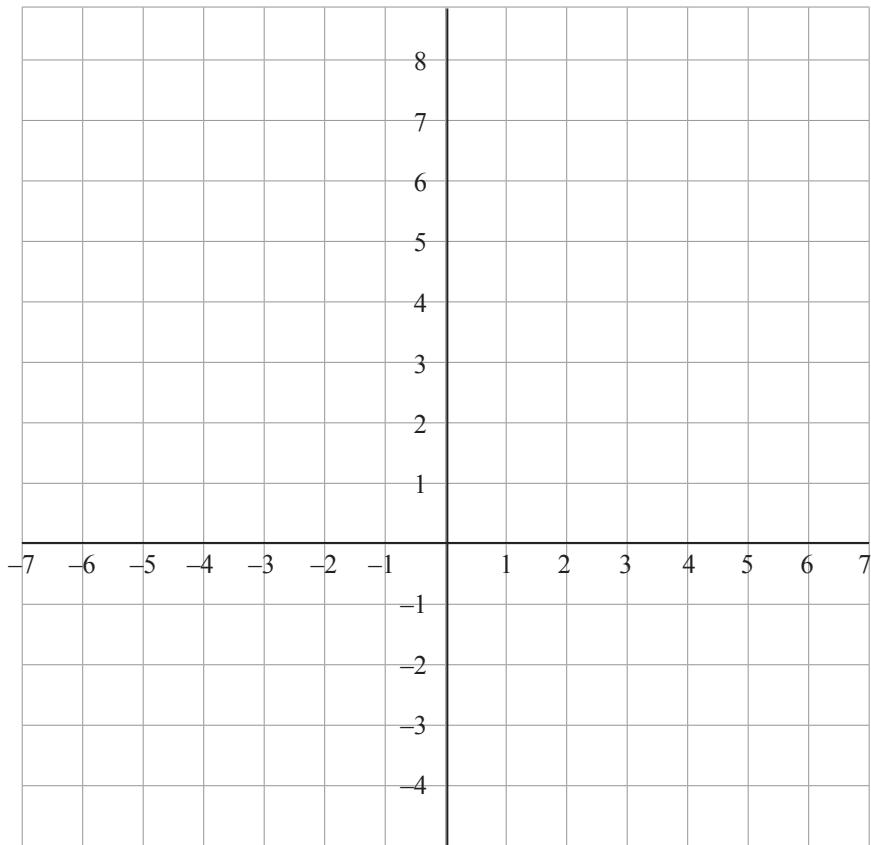
Langkah 2 Tentukan titik *P'*, *Q'*, *R'*, dan *S'* sehingga garis α tegak lurus dan membagi *PP'*, *QQ'*, *RR'*, dan *SS'* sama panjang. Titik *P'*, *Q'*, *R'*, dan *S'* merupakan bayangan titik *P*, *Q*, *R*, dan *S*.

Langkah 3 Hubungkan titik-titik *P'*, *Q'*, *R'*, dan *S'*. Oleh karena *P'*, *Q'*, *R'*, dan *S'* merupakan bayangan dari *P*, *Q*, *R*, dan *S* yang direfleksikan oleh garis α, maka segi empat *P'Q'R'S'* merupakan bayangan segi empat *PQRS*.

Setelah kamu mengamati contoh-contoh pencerminan (refleksi) serta cara membuat bayangan hasil pencerminan suatu bangun datar pada Kegiatan 1, sekarang buatlah pertanyaan dengan menggunakan kata pencerminan (refleksi).

Kegiatan 2 Menggambar Bayangan Hasil Pencerminan

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Lakukanlah kegiatan berikut ini.

Salinlah gambar berikut ini pada kertas berpetak yang telah kamu sediakan. Gambar bayangan dari tiap-tiap bangun datar sesuai dengan garis refleksi tiap-tiap gambar. Ikuti langkah-langkah menggambar bayangan hasil pencerminan suatu bangun datar pada Kegiatan 1.

Setelah kamu selesai menggambar bayangan hasil pencerminan dari tiap-tiap bangun datar, selanjutnya diskusikan hasil yang telah kamu dapatkan dengan teman sebangkumu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.

Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 anak.Sediakan kertas karton berukuran minimal 1×1 meter, spidol, penggaris, dan 10 tutup botol minuman bekas. Pada bagian belakang tutup botol berikan selotip sehingga tutup botol tersebut dapat ditempelkan pada kertas. Gambarlah koordinat kartesius pada kertas karton dengan menggunakan spidol dan penggaris seperti gambar di samping ini. Setiap anak, secara bergantian, diberikan tugas untuk melakukan Subkegiatan 3.1 sampai dengan Subkegiatan 3.5

Sub Kegiatan 3.1

1. Letakkan tutup botol pada koordinat *A* (3, 4).
2. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap sumbu-*x* dari titik *A*.
3. Hitung jarak titik *A* terhadap sumbu-*x*. Berapa satuan jarak titik *A* terhadap sumbu-*x*?
4. Tentukan titik *A'* sehingga garis yang menghubungkan titik *A* dan *A'* (disebut garis *AA'*) tegak lurus terhadap sumbu-*x* dan sumbu-*x* membagi garis *AA'* menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik *A'*. Berapakah koordinat titik *A'*? (Keterangan: titik *A'* merupakan hasil pencerminan titik *A* terhadap sumbu-*x*)
5. Apakah koordinat-*x* dari titik *A* dan *A'* sama? Apakah koordinat-*y* dari titik *A* dan *A'* berlawanan?

Sub Kegiatan 3.2

1. Letakkan tutup botol pada koordinat *B* (2, 3).
2. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap sumbu-*y* dari titik *B*.
3. Hitung jarak titik *B* terhadap sumbu-*y*. Berapa satuan jarak titik *B* terhadap sumbu-*y*?
4. Tentukan titik *B'* sehingga garis yang menghubungkan titik *B* dan *B'* (disebut garis *BB'*) tegak lurus terhadap sumbu-*y* dan sumbu-*y* membagi garis *BB'* menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik *B'*. Berapakah koordinat titik *B'*? (Keterangan: titik *B'* merupakan hasil pencerminan titik *B* terhadap sumbu-*y*).
5. Apakah koordinat-*y* dari titik *B* dan *B'* sama? Apakah koordinat-*x* dari titik *B* dan *B'* berlawanan?

Sub Kegiatan 3.3

1. Letakkan tutup botol pada koordinat *C* (4, 4).
2. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap titik asal dari titik *C*.
3. Hitung jarak titik *C* terhadap titik asal O (0, 0). Berapa satuan jarak titik *C* terhadap titik asal O (0, 0)?
4. Tentukan titik *C'* sehingga garis yang menghubungkan titik *C* dan *C'* (disebut garis *CC'*) tegak lurus terhadap titik asal dan membagi garis *CC'* menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik *C'*. Berapakah koordinat titik *C'*? (Keterangan: titik *C'* merupakan hasil pencerminan titik *C* terhadap titik asal).
5. Apakah koordinat-*x* dan *y* dari titik *C* dan *C'* berlawanan semua?

Sub Kegiatan 3.4

1. Letakkan tutup botol pada koordinat *D* (4, 5).
2. Gambar garis $y = x$ pada koordinat kartesius tersebut. Kemudian gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap titik asal dari titik *D*.
3. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap garis $y = x$ dari titik *D*.
4. Hitung jarak titik D terhadap garis $y = x$. Berapa satuan jarak titik *D* terhadap garis $y = x$?

5. Tentukan titik *D'* sehingga garis yang menghubungkan titik *D* dan *D'* (disebut garis *DD'*) tegak lurus terhadap garis $y = x$ dan membagi garis *DD'* menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik *D'*. Berapakah koordinat titik *D'*? (Keterangan: titik *D'* merupakan hasil pencerminan titik *D* terhadap garis $y = x$).
6. Apakah koordinat -x dan y dari titik *D* dan *D'* saling berkebalikan?

Sub Kegiatan 3.5

1. Letakkan tutup botol pada koordinat *E* (5, 7).
2. Gambar garis $y = –x$ pada koordinat kartesius tersebut. Kemudian gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap titik asal dari titik *E*.
3. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap garis $y = –x$ dari titik *E*.
4. Hitung jarak titik *E* terhadap garis $y = –x$. Berapa satuan jarak titik *E* terhadap garis $y = –x$?
5. Tentukan titik *E'* sehingga garis yang menghubungkan titik *E* dan *E'* (disebut garis *EE'*) tegak lurus terhadap garis $y = –x$ dan membagi garis *EE'* menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik *E'*. Berapakah koordinat titik *EE'*? (Keterangan: titik *E'* merupakan hasil pencerminan titik *E* terhadap garis $y = –x$)
6. Apakah koordinat -x dan y dari titik *E* dan *E'* saling berkebalikan serta berlawanan?

Setelah kamu melakukan Kegiatan 3 di atas, sekarang buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut ini: koordinat, bayangan, refleksi, sumbu-x, sumbu-y, titik asal, garis $y = x$, garis $y = –x$. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.

Setelah kamu melakukan Kegiatan 3 bersama teman kelompokmu, coba kamu amati koodinat hasil pencerminan pada tiap-tiap sub kegiatan. Lengkapi Tabel 3.1 berikut ini berdasarkan Kegiatan 3 yang telah kamu lakukan sebelumnya.

Tabel 3.1 Titik Koordinat Hasil Pencerminan

No.	Titik Koordinat	Pencerminan Terhadap	Titik Koordinat Bayangan
1.	A (..., ...)		
2.	B (..., ...)		
3.	C (..., ...)		
4.	D (..., ...)		
5.	E (..., ...)		

Dikusi dan Berbagi

Setelah kamu mengisi Tabel 3.1, jawablah pertanyaan berikut ini melalui diskusi bersama teman sekelompokmu.

Untuk sembarang titik (x, y) yang dicerminkan terhadap:

1. sumbu-x
2. sumbu-y
3. titik asal O (0, 0)
4. garis $y = x$
5. garis $y = –x$

bagaimana koordinat dari masing-masing bayangannya?

Tuliskan jawabnmu tersebut pada kertas dan paparkan kepada teman sekelasmu.

Kegiatan 4 Pencerminan Terhadap Garis Sejajar Sumbu-x dan Sumbu-y

Ayo Kita Mencoba

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

1. Gambarlah segitiga ABC dengan koordinat titik sudut A (3, 9), B (3, 3), dan C (6, 3), kemudian gambarlah garis $y = 1$. Dengan menggunakan cara yang sama pada kegiatan-kegiatan yang telah kamu lakukan sebelumnya, gambar bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$. Bayangan hasil pencerminan tersebut selanjutnya disebut dengan segitiga ABC_1 dengan koordinat titik sudutnya antara lain A_1', B_1', dan C_1'.
2. Setelah kamu mendapatkan gambar bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$, selanjutnya gambar garis $x = –2$. Dengan cara yang sama, gambar bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $x = –2$. Bayangan hasil pencerminan tersebut selanjutnya disebut dengan segitiga ABC_2 dengan koordinat titik sudutnya antara lain A_2', B_2', dan C_2'.
3. Berapakah koordinat dari A_1', B_1', C_1', A_2', B_2', dan C_2'?

Amati koordinat bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$ dan garis $x = –2$, selanjutnya lengkapilah tabel di bawah ini.

Tabel 3.2 Koordinat Titik Sudut Awal dan Bayangan Hasil Pencerminan Terhadap Garis $y = 1$

Koordinat Awal	Koordinat Bayangan Pada Sumbu-*x*	Koordinat Bayangan Pada Sumbu-*y*
A (3, 9)	...	$-7 = 2 \times 1 - 9$
B (3, 3)	...	...
C (6, 3)	...	...

angka 1 menunjukkan bahwa bangun segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $y = 1$

angka 9 menunjukkan bahwa koordinat awal titik A pada sumbu-y adalah 9

Tabel 3.3 Koordinat Titik Sudut Awal dan Bayangan Hasil Pencerminan TerhadapaGaris $x = 2$

Koordinat Awal	Koordinat Bayangan Pada Sumbu-x	Koordinat Bayangan Pada Sumbu-y
A (3, 9)	$-7 = 2 \times (-2) - 3$	...
B (3, 3)	...	...
C (6, 3)	...	...

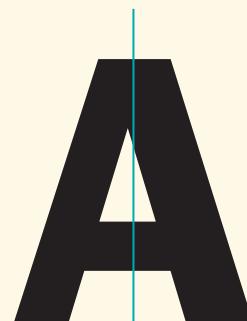
angka –2 menunjukkan bahwa bangun segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $x = -2$

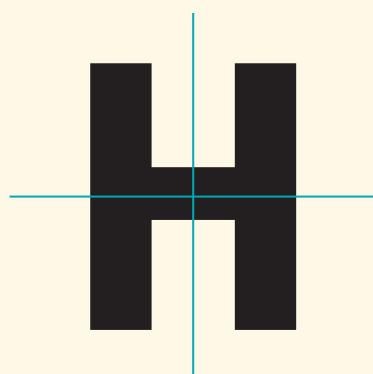
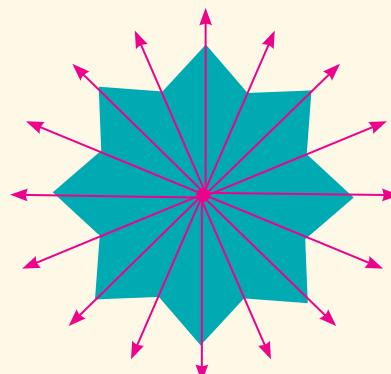
angka 3 menunjukkan bahwa koordinat awal titik A pada sumbu-x adalah 3

Setelah kamu melakukan Kegiatan 4 di atas, jawablah pertanyaan di bawah ini melalui diskusi dengan teman sebangkumu.

1. Pada pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$, apakah koordinat-x dari titik sudut segitiga ABC dan bayangannya sama? Menurutmu apakah jika segitiga ABC dicerminkan terhadap sembarang garis $y = h$, dengan h merupakan bilangan bulat (garis $y = h$ merupakan garis yang sejajar dengan sumbu-x) maka koordinat titik sudut pada sumbu-x dari bayangannya akan selalu sama dengan bangun aslinya?
2. Berdasarkan Kegiatan 4 dan hasil pengamatanmu pada Tabel 3.2 di atas, menurutmu bagaimana rumus untuk mendapatkan koordinat bayangan pada sumbu-y dari suatu titik yang direfleksikan terhadap garis $y = h$?
3. Pada pencerminan segitiga ABC terhadap garis $x = -2$, Apakah koordinat-y dari titik sudut segitiga ABC dan bayangannya sama? Menurutmu apakah jika segitiga ABC dicerminkan terhadap sembarang garis $x = h$, dengan h merupakan bilangan bulat (garis $x = h$ merupakan garis yang sejajar dengan sumbu-y) maka koordinat titik sudut pada sumbu-y dari bayangannya akan selalu sama dengan bangun aslinya?

4. Berdasarkan Kegiatan 4 dan hasil pengamatanmu pada Tabel 3.3 di atas, menurutmu bagaimana rumus untuk mendapatkan koordinat bayangan pada sumbu-x dari suatu titik yang direfleksikan terhadap garis $x = h$?

Tuliskan jawabnmu tersebut pada kertasdan paparkan kepada teman sekelasmu.

Sedikit Informasi

Simetri Lipat

Beberapa gambar dapat dilipat sedemikian sehingga setengah bangun tersebut sama dengan bagian yang lain. Lipatan yang dimaksud merupakan garis refleksi yang disebut **garis simetri** atau **simetri lipat**.

Huruf G tidak memiliki simetri lipat

Huruf A memiliki 1 simetri lipat

Huruf H memiliki 2 simetri lipat

Memiliki lebih dari 2 simetri lipat

Setelah kamu melakukan Kegiatan 1 sampai dengan Kegiatan 4, jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Tunjukkan bahwa bayangan sebuah titik yang direfleksikan terhadap titik asal sama dengan bayangan titik tersebut jika direfleksikan terhadap sumbu -x dan dilanjutkan refleksi di sumbu-y.
2. Diketahui segitiga ABC yang titik sudutnya di A (3, 2), B (4, 4), dan C (1, 3). Gambarlah segitiga tersebut kemudian gambar hasil bayangannya jika dicerminkan terhadap:
   a. Sumbu-x
   b. Sumbu-y
   c. Titik asal O (0,0)
   d. Garis $y = x$
   e. Garis $y = -x$
   f. Garis $y = 2$
   g. Garis $x = 3$

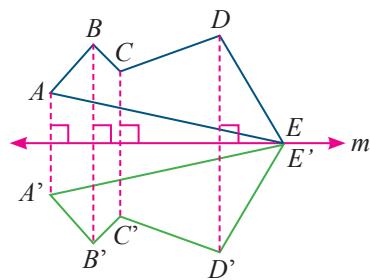
Berdasarkan Kegiatan 1, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Berdasarkan Kegiatan 3 dan Kegiatan 4 di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh? Perhatikan contoh kesimpulan berikut ini.

Berdasarkan Subkegiatan 3.1 diperoleh kesimpulan bahwa untuk sebarang titik koordinat (x, y) jika dicerminkan terhadap sumbu-x maka koordinat-x tetap sedangkan koordinat-y berlawanan. Sehingga hasil refleksi sembarang titik (x, y) terhadap sumbu-x akan menghasilkan bayangan dengan koordinat $(x, -y)$ atau dapat ditulis $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.

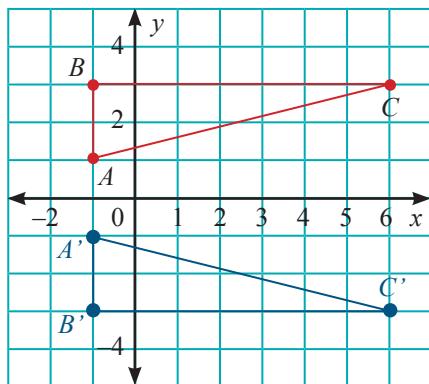
Buatlah kesimpulan seperti contoh di atas jika diketahui sebarang titik koordinat (x, y) dicerminkan terhadap sumbu-y, titik asal O (0, 0), garis $y = x$, garis $y = -x$, garis $y = h$, dan garis $x = h$.

Materi Esensi 3.1 Pencerminan (Refleksi)

Refleksi atau pencerminan merupakan satu jenis transformasi yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang dengan mengggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang dipindahkan. Perhatikan gambar di bawah.

Gambar di samping menunjukkan contoh refleksi (pencerminan) bangun datar *ABCDE* pada garis *m*. Perhatikan bahwa ruas garis yang menghubungkan titik dan bayangannya tegak lurus terhadap garis *m*. Garis *m* disebut **garis refleksi** untuk *ABCDE* dan bayangannya *A'B'C'D'E'*.

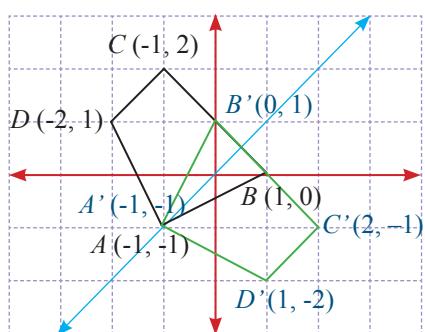
Karena *E* terletak pada garis refleksi, titik awal dan bayangannya berada di titik yang sama. Jarak antara *A* terhadap garis *m* sama dengan jarak *A'* terhadap garis *m*, begitu pula untuk titik sudut yang lainnya dan bayangannya yang memiliki jarak sama terhadap garis refleksi *m*.

Jika diketahui sebarang titik dengan koordinat (x, y) pada koordinat kartesius, maka koordinat bayangan hasil pencerminannya dapat dilihat pada Tabel 3.4 berikut ini.

Tabel 3.4 Koordinat Bayangan Hasil Pencerminan dari (x, y)

No.	Pencerminan Terhadap	Titik Koordinat Bayangan
1.	Sumbu-x	$(x, -y)$
2.	Sumbu-y	$(-x, y)$
3.	Titik Asal O (0, 0)	$(-x, -y)$
4.	Garis $y = x$	(y, x)
5.	Garis $y = -x$	$(-y, -x)$
6.	Garis $y = h$	$(x, 2h - y)$
7.	Garis $x = h$	$(2h - x, y)$

Contoh 1 — Pencerminan Terhadap Sumbu-x

Segitiga ABC berkoordinat di A (–1, 1), B (–1, 3), dan C (6, 3). Gambar segitiga ABC dan bayangannya yang direfleksikan terhadap sumbu-x. Bandingkan koordinat titik-titik ABC dengan koordinat bayangannya.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa titik A berada 1 satuan di atas sumbu-x, maka bayangannya adalah A' yang terletak 1 satuan di bawah sumbu-x. Sedangkan titik B dan C berada pada 3 satuan di atas sumbu-x, maka banyangannya adalah B' dan C' yang terletak 3 satuan di bawah sumbu-x. Dengan demikian diperoleh koordinat masing-masing titik dan bayangannya adalah sebagai berikut:

A (–1, 1) $\rightarrow$ A' (–1, –1)

B (–1, 3) $\rightarrow$ B' (–1, –3)

C (6, 3) $\rightarrow$ C' (6, –3)

Hubungkan ketiga titik sehingga membentuk segitiga $A'B'C'$.

Contoh 2 — Pencerminan Terhadap Garis $y = x$

Diketahui segi empat $ABCD$ yang memiliki koordinat di A (-1, -1), B (1, 0), C (-1, 2) dan D (-2, 1) direfleksikan terhadap garis $y = x$. Gambar $ABCD$ dan bayangannya yang direfleksikan terhadap garis $y = x$. Bandingkan koordinat titik-titik $ABCD$ dengan koordinat bayangannya.

Penyelesaian:

Untuk menentukan bayangan titik-titik segi empat $ABCD$, perhatikan jarak titik B ke garis

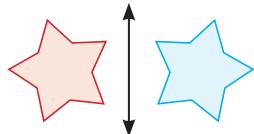
$y = x$. Dari titik B buat garis yang tegak lurus ke garis $y = x$ (disebut garis *BB'*) kemudian dapatkan titik *B'* yang memiliki jarak yang sama besar dengan jarak titik *B* ke garis $y = x$. Titik *B'* merupakan bayangan titik *B* hasil refleksi terhadap garis $y = x$. Dengan demikian diperoleh koordinat *B'* (0, 1). Gunakan cara yang sama, sehingga diperoleh koordinat bayangan untuk titik-titik yang lainnya sebagai berikut:

$A\ (-1, -1) \rightarrow A'\ (-1, -1)$

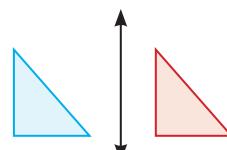
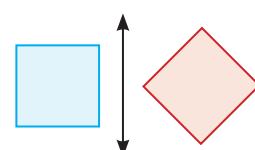
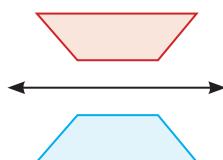
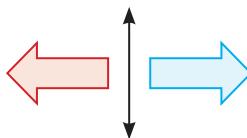
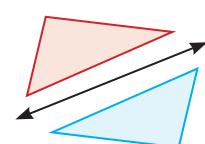
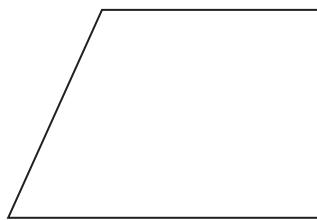
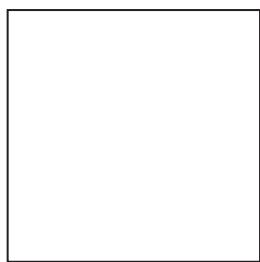
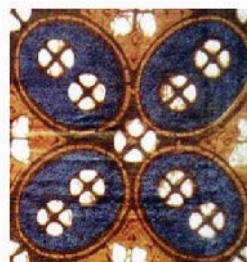
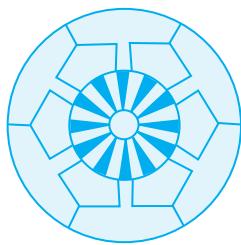
$B\ (1, 0) \rightarrow B'\ (0, 1)$

$C\ (-1, 2) \rightarrow C'\ (2, -1)$

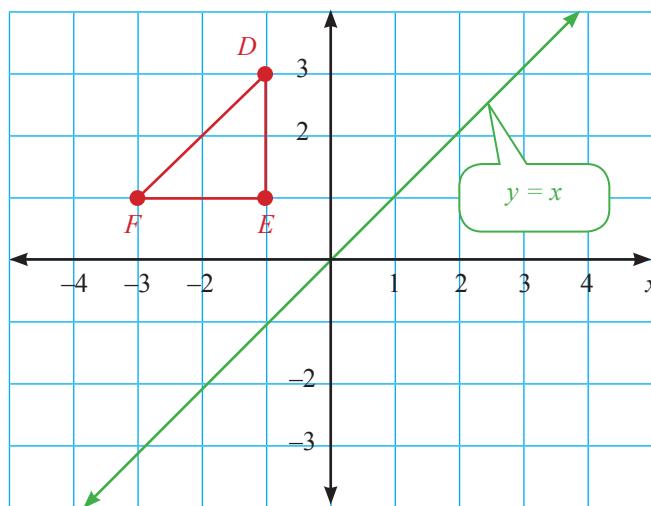
$D\ (-2, 1) \rightarrow D'\ (1, -2)$

Hubungkan keempat titik sehingga membentuk segi empat *A'B'C'D'*.

1. Setelah dicerminkan terhadap titik asal, ΔXYZ memiliki bayangan di X' (1 ,4), Y' (2, 2), dan Z' (–2, –3). Tentukan bayangan ΔXYZ jika direfleksikan terhadap garis $x = -1$.

2. Setelah direfleksikan terhadap sumbu-*x*, ΔFGH memiliki bayangan di F'(1, 4), G' (4, 2), dan H' (3, –2). Tentukan bayangan ΔFGH setelah direfleksikan terhadap sumbu-*y*.

Latihan 3.1 Pencerminan (Refleksi)

1. Tunjukkan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil pencerminan dari gambar yang berwarna merah. Berikan penjelasanmu.

2. Tentukan berapa banyak simetri lipat yang dimiliki gambar berikut.

a.

d.

b.

e.

c.

f.

3. Gambar masing-masing bangun berikut dan bayangannya terhadap refleksi yang diberikan.

   a. Segi empat *JKLM* dengan titik sudutnya di *J* (2, 2), *K* (7, 4), *L* (9, –2), dan *M* (3, –1) terhadap sumbu-*y*.

   b. Trapesium dengan titik sudutnya di *D* (4, 0), *E* (–2, 4), *F* (–2, –1), dan *G* (4, –3) terhadap titik asal.

   c. ΔABC dengan titik sudutnya di *A* (4, –2), *B* (4, 2), dan *C* (6, –2) terhadap garis $y = x$.

   d. ΔOPQ dengan titik sudutnya di O (–2, 1), *P* (0, 3), dan *Q* (2, 2) terhadap garis $y = -x$.

e. Segi empat $WXYZ$ dengan titik sudutnya di W (2, –1), X (5, –2), Y (5, –5), dan Z (2, –4) terhadap garis $y = 2$.

4. Cerminkan segitiga DEF terhadap garis $y = x$. Gambar segitiga $D'E'F'$ dan tuliskan koordinatnya yang merupakan hasil pencerminan DEF terhadap garis $y = x$.

5. Huruf mana yang akan tetap sama jika dicerminkan terhadap suatu garis?

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

6. Segi empat $KLMN$ dengan titik sudut di K (–2, 4), L (3, 7), M (4, –8), dan N (–3, –5) direfleksikan terhadap sumbu-x kemudian direfleksikan terhadap garis $y = x$. Tentukan koordinat $K''L''M''N''$.

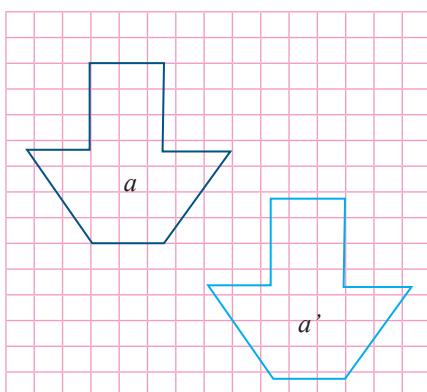
7. Segitiga HIJ direfleksikan terhadap sumbu-x, kemudian sumbu-y, kemudian titik asal. Hasilnya refleksinya berkoordinat di H'''(2, 3), I'''(8, –4), dan J'''(–6, –7). Tentukan koordinat H, I, dan J.

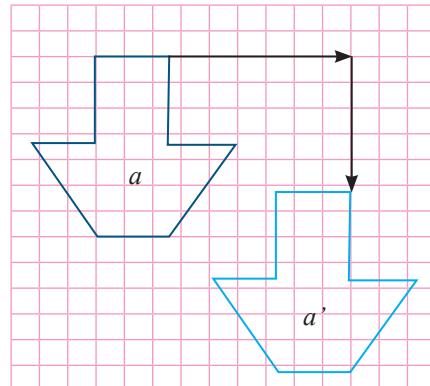
3.2 Pergeseran (Translasi)

Pertanyaan Penting

Apa yang dimaksud dengan translasi pada suatu benda? Bagaimana caramu menentukan koordinat bayangan hasil translasi pada koordinat kartesius? Supaya kamu mengetahui dan memahami jawaban dari pertanyaan di atas lakukan kegiatan-kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 1 Translasi Pada Suatu Benda

Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 3.2 Mendorong meja

Pernahkah kamu menggeser meja dari satu tempat ke tempat lainnya? Ketika kamu berhasil memindahkan meja tersebut maka posisi meja akan berubah dari posisi awal menuju posisi akhir. Gerakan memindahkan meja tersebut merupakan salah satu contoh dari translasi.

Perhatikan bangun datar *a* pada gambar di samping. Kemudian perhatikan bangun *a'* yang merupakan bayangan dari *a*. Kamu dapat memperoleh bangun datar *a'* dengan cara menggeser (mentranslasikan) bangun *a*.

Untuk mengetahui jenis translasi yang menggerakkan bangun *a* sehingga menjadi bangun *a'*, ikuti langkah-langkah berikut ini.

1. Pilih sebarang titik sudut pada bangun awal *a* (kamu dapat memilih sebarang titik sudut dari bangun), kemudian beri nama titik sudut tersebut *A*. Pada titik sudut bayangan yang bersesuaian dengan titik *A* berikan nama *A'*.
2. Dari titik *A* gambarlah garis horizontal sampai tepat berada pada bagian atas titik *A'*. Selanjutnya gambarlah garis vertikal dari titik tersebut sehingga garis tersebut bertemu dengan titik *A'*.
3. Hitung berapa satuan panjang garis horizontal yang menunjukkan seberapa jauh bangun datar *a* bergeser (bertranslasi) secara horizontal (ke kanan).
4. Hitung berapa satuan panjang garis vertikal yang menunjukkan seberapa jauh bangun datar *a* bergeser (bertranslasi) secara vertikal (ke bawah).

Setelah kamu memahami Kegiatan 1 di atas, sekarang buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut: translasi, sumbu horizontal, sumbu vertikal. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.

Sedikit Informasi

Jika suatu translasi (pergeseran) pada suatu benda dilakukan sepanjang garis horizontal, maka translasi tersebut akan bernilai positif jika benda ditranslasikan ke arah kanan, dan bernilai negatif jika benda ditranslasikan ke arah kiri.

Jika suatu translasi (pergeseran) pada suatu benda dilakukan sepanjang garis vertikal, maka translasi tersebut akan bernilai positif jika benda ditranslasikan ke arah atas, dan bernilai negatif jika benda ditranslasikan ke arah bawah.

Ayo Kita Gali Informasi

Berdasarkan informasi yang telah kamu dapatkan sebelumnya serta Kegiatan 1, jawablah pertanyaan berikut.

1. Apakah translasi pada bagian horizontal yang menggerakkan bangun datar *a* sehingga menjadi *a'* bernilai positif atau negatif?
2. Apakah translasi pada bagian vertikal yang menggerakkan bangun datar *a* sehingga menjadi *a'* bernilai positif atau negatif?
3. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ menunjukkan translasi yang menggerakan suatu bangun datar dengan x menunjukkan translasi pada garis horizontal dan y menunjukkan translasi pada garis vertikal, coba kamu tuliskan pasangan bilangan translasi yang menggerakkan bangun datar *a* sehingga menjadi *a'*.

Kegiatan 2 Translasi Pada Koordinat Kartesius

Ayo Kita Mencoba

Diketahui segi empat *ABCD* memiliki titik sudut di *A* (1, 2), *B* (3, 1), *C* (4, –1) dan *D* (2, 0). Gambarlah segi empat tersebut kemudian gambar hasil bayangannya jika ditranslasikan sejauh 4 satuan ke kiri dan 2 satuan ke bawah. Tuliskan koordinat bayangan hasil translasi segi empat *ABCD* (Bayangan *ABCD* selanjutnya disebut dengan *A'B'C'D'*).

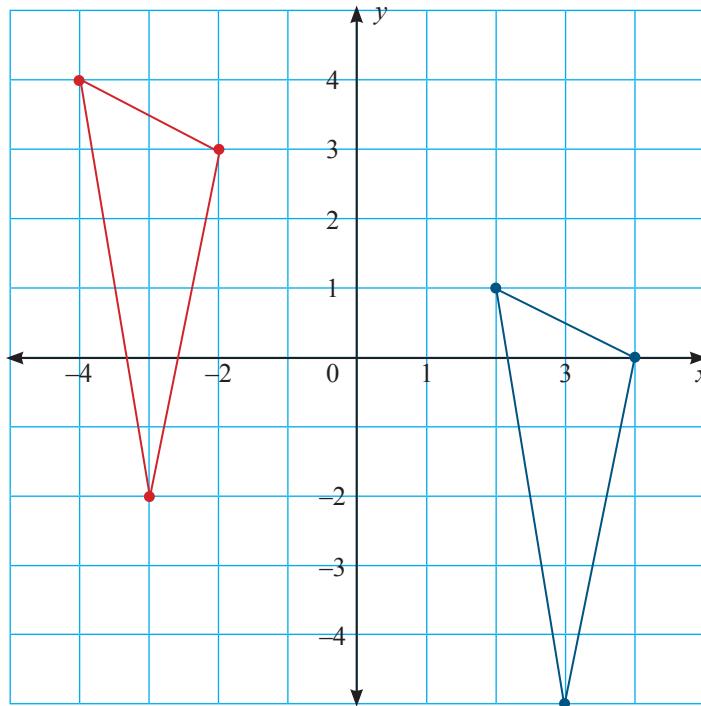
Ayo Kita Gali Informasi

Setelah kamu melakukan aktivitas Kegiatan 2, coba kamu lengkapi Tabel 3.5 berikut ini.

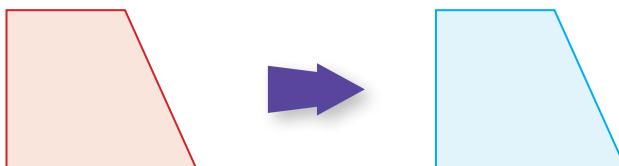
Tabel 3.5 Koordinat Bayangan Hasil Translasi Segi empat *ABCD*

Titik Sudut *ABCD*	$(x - 4, y - 2)$	Titik Sudut *A'B'C'D'*
A (1, 2)	(1 – 4, 2 – 2)	(–3, 0)
...	Titik Asal O (0, 0)	$(-x, -y)$
B (3, 1)	...	...
C (4, –1)	...	...
D (2, 0)	...	...

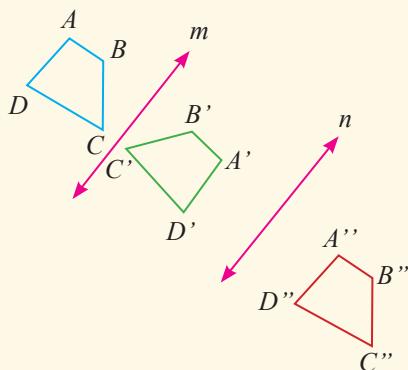
Coba kamu perhatikan Tabel 3.5 di atas. Apakah kolom kedua dan kolom ketiga dari tabel di atas memiliki nilai yang sama? Salah satu cara untuk mendapatkan koordinat bayangan hasil translasi adalah dengan menambahkan secara langsung bilangan yang menunjukkan translasi dengan koordinat awal bangun.

Jika suatu translasi pada suatu titik dilakukan sepanjang garis horizontal, maka bilangan translasi tersebut akan bernilai positif jika titik tersebut ditranslasikan ke arah kanan, dan bernilai negatif jika titik ditranslasikan ke arah kiri. Jika translasi pada suatu titik dilakukan sepanjang garis vertikal, maka bilangan translasi tersebut akan bernilai positif jika titik ditranslasikan ke arah atas, dan bernilai negatif jika titik ditranslasikan ke arah bawah.

Setelah kamu melakukan Kegiatan 1 dan 2, maka kamu telah mengetahui cara mendapatkan koordinat bayangan hasil translasi dari suatu titik maupun bangun datar. Sekarang jawablah pertanyaan di bawah ini agar kamu mengetahui jenis translasi yang menggerakkan koordinat suatu bangun.

Tentukan translasi (pasangan bilangan translasi) yang menggerakkan segitiga merah menjadi segitiga biru.

Setelah kamu menjawab pertanyaan pada bagian Ayo Kita Menalar, tuliskan jawabanmu di buku tulis. Diskusikan jawabanmu dengan teman sebangkumu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.

Setelah kamu melakukan beberapa kegiatan di atas, coba kamu simpulkan bagaimana cara mendapatkan koordinat hasil translasi dari suatu benda pada koordinat kartesius?

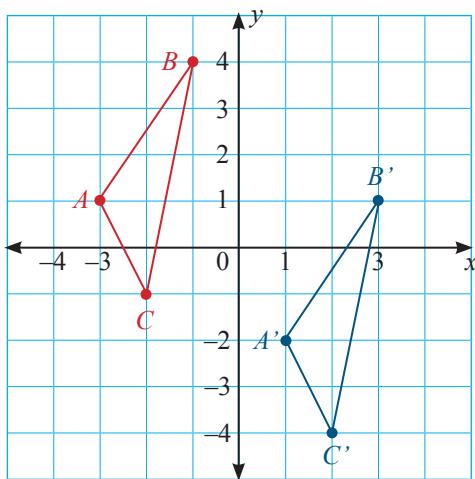
Materi Esensi 3.2 Pergeseran (Translasi)

Translasi merupakan salah satu jenis transformasi yang bertujuan untuk memindahkan semua titik suatu bangun dengan jarak dan arah yang sama.

Translasi pada bidang Kartesius dapat dilukis jika kamu mengetahui arah dan seberapa jauh gambar bergerak secara mendatar dan atau vertikal. Untuk nilai yang sudah ditentukan a dan b yakni translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memindah setiap titik $P(x, y)$ dari sebuah bangun pada bidang datar ke $P'(x + a, y + b)$. Translasi dapat disimbolkan dengan $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$.

Sedikit Informasi

Menentukan Translasi Dengan Menggunakan Pencerminan Berulang

Cara lain untuk menentukan translasi adalah dengan menunjukkan pencerminan terhadap dua garis sejajar, kemudian mencerminkan gambar/bangun terhadap garis lain yang sejajar. Perhatikan contoh berikut ini.

Perhatikan gambar di bawah. Garis m dan n sejajar. Tentukan apakah bangun berwarna merah merupakan translasi bangun yang berwarna biru, segi empat $ABCD$.

Penyelesaian

Cerminkan segi empat *ABCD* di garis *m*. Hasilnya yaitu bangun berwarna hijau, segi empat *A'B'C'D'*. Kemudian cerminkan bangun berwarna hijau, segi empat *A'B'C'D'* di garis *n* menghasilkan segi empat berwarna merah. Segiemmpat berwarna merah, *A''B''C''D''* memiliki bentuk dan arah yang sama dengan segi empat *ABCD*.

Jadi, segi empat *A''B''C''D''* merupakan bayangan hasil translasi segi empat *ABCD*.

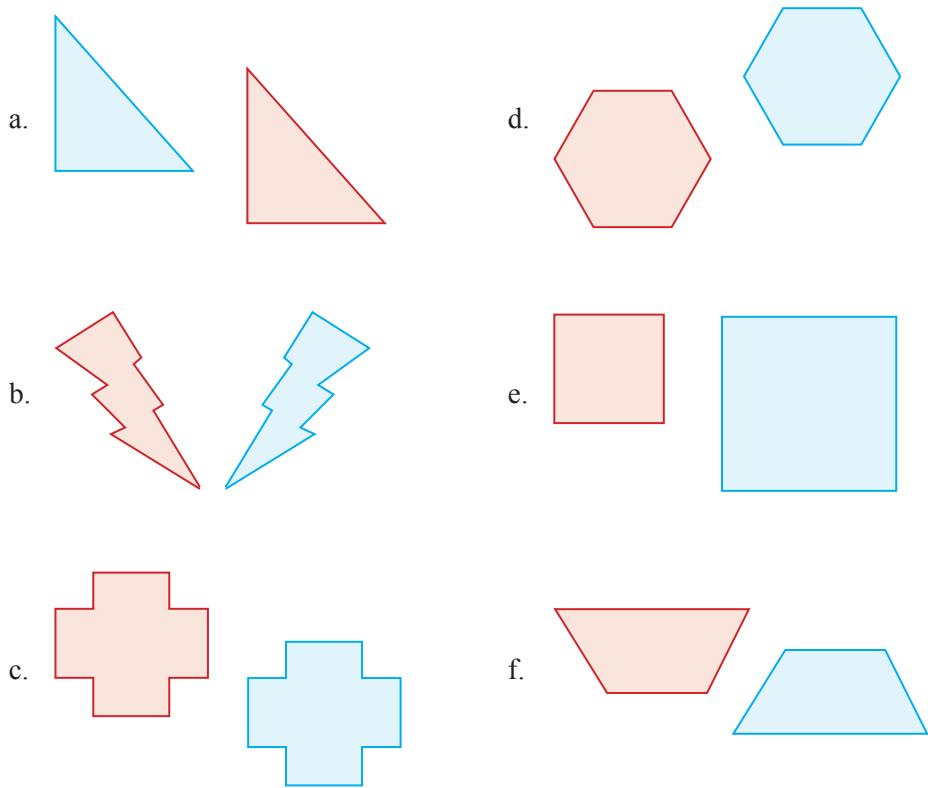
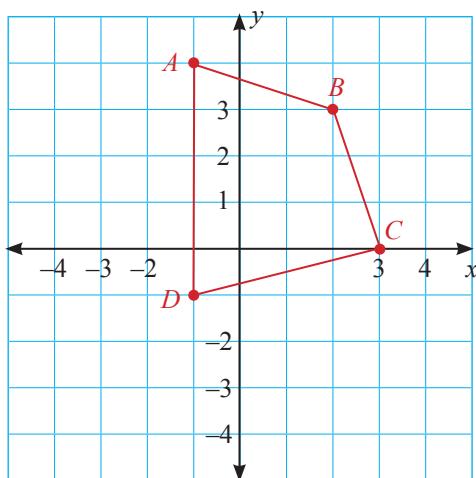
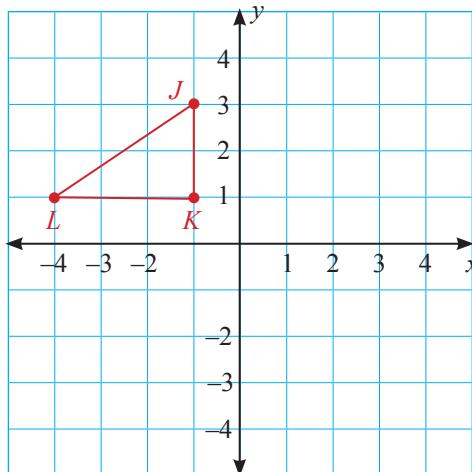
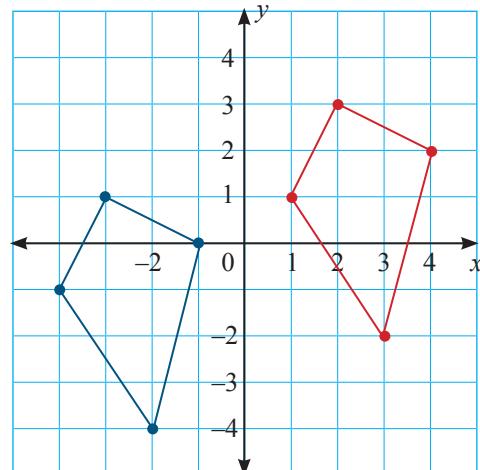
Contoh 1 Koordinat Bayangan Hasil Translasi

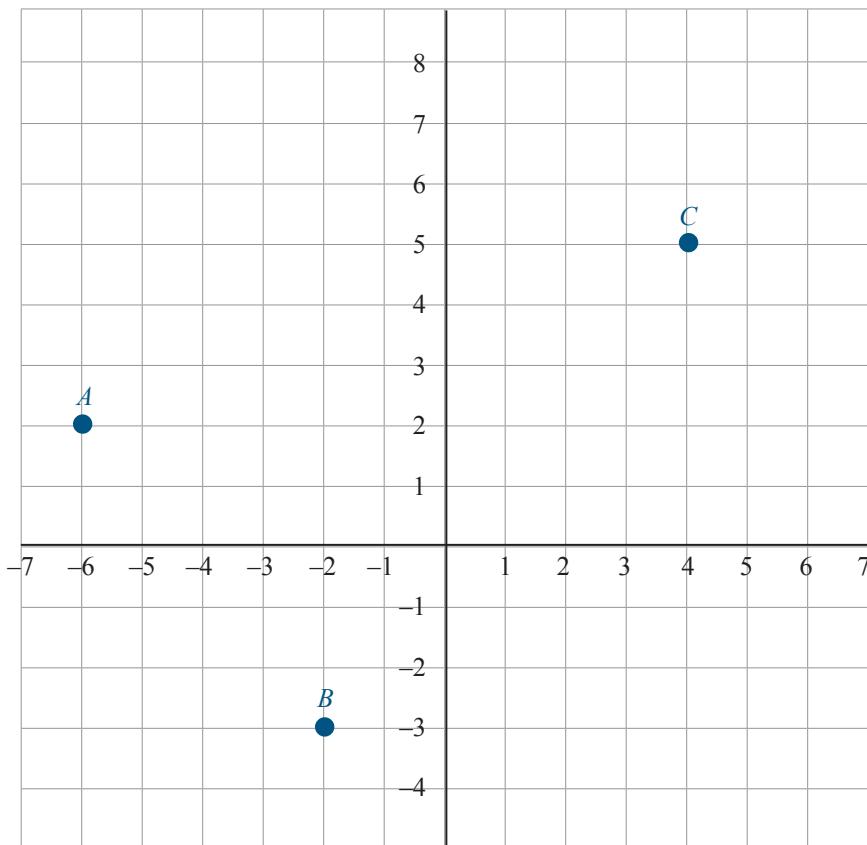
Gambar di samping menunjukkan segitiga *ABC* yang ditranslasikan 4 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah. Hal ini dapat dinyatakan sebagai $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 3)$.

Koordinat bayangan hasil translasinya sebagai berikut

$A(-3, 1) \rightarrow A'(-3 + 4, 1 - 3)$ atau $A'(1, -2)$

$B(-1, 4) \rightarrow B'(-1 + 4, 4 - 3)$ atau $B'(3, 1)$

$C(-2, -1) \rightarrow C'(-2 + 4, -1 - 3)$ atau $C'(2, -4)$

Setelah ditranslasikan oleh $(x, y) \rightarrow (x - 4, y + 5)$, ΔXYZ memiliki bayangan $X'(-8, 5)$, $Y'(2, 7)$, dan $Z'(3, 1)$. Tentukan koordinat *X*, *Y*, dan *Z*.

Latihan 3.2 Pergeseran (Translasi)

1. Tentukan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil pencerminan dari gambar yang berwarna merah. Berikan penjelasanmu.

2. Gambar dan tentukan koordinat hasil translasi dari bangun datar di bawah ini.

   a. Translasikan segi empat merah sejauh 2 satuan ke kiri dan 5 satuan ke bawah

b. Translasikan segitiga merah sejauh 3 satuan ke kanan dan 4 satuan ke bawah.

3. Segitiga FGH ditranslasi sehingga menghasilkan bayangan ΔPQR. Diketahui koordinat F (3, 9), G (–1, 4), P (4, 2), dan R (6, –3), tentukan koordinat H dan Q. Tentukan pula translasinya.

4. Segitiga WAN berkoordinat di W (0, 1), A (1, –2) dan N (–2, 1). Gambarlah segitiga tersebut beserta bayangannya setelah translasi:
   a. 1 satuan ke kiri dan 5 satuan ke atas
   b. $(x + 2, y + 4)$
   c. 3 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah
   d. $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ kemudian dicerminkan terhadap sumbu-y.

5. Jelaskan translasi yang menggerakkan bangun datar yang berwarna biru menjadi bangun datar yang berwarna merah.

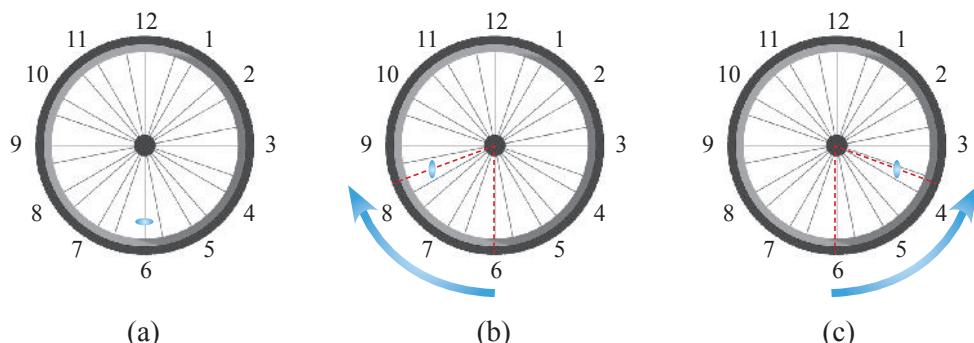
6. Diketahui Segitiga OPQ berkoordinat di O (2, 5), P (–3, 4), dan Q (4, –2) ditranslasikan sehingga didapatkan koordinat bayangannya adalah O' di (3, 1). Tentukan pasangan bilangan translasinya dan koordinat titik P' dan Q'.

7. Seekor harimau sedang berburu rusa di dalam hutan. Berdasarkan hasil pemantauan diketahui bahwa koordinat rusa berada di titik *A* dan koordinat harimau berada pada titik *B*. Rusa tersebut kemudian bergerak menuju titik *C*.

a. Tentukan pasangan bilangan translasi yang menggerakkan rusa dari titik *A* menuju titik *C*.

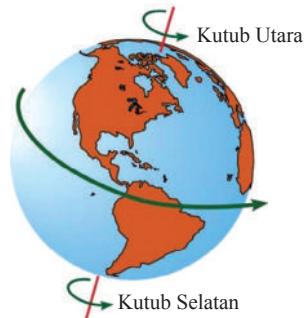
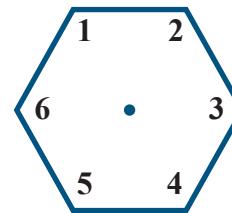
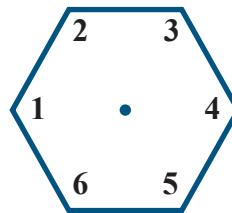
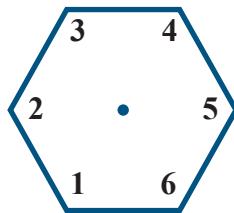
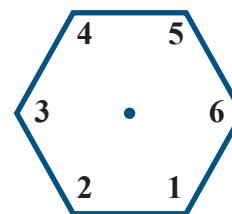
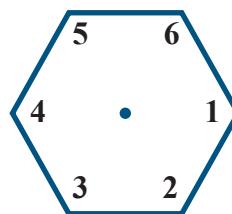
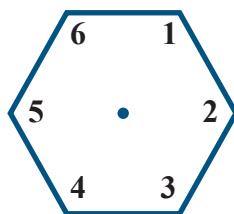
b. Jika harimau menggunakan translasi yang sama dengan yang dilakukan oleh rusa, apakah harimau dapat menangkap rusa tersebut?

c. Tentukan pasangan bilangan translasi yang harus dilakukan oleh harimau agar ia mendapatkan rusa.

3.3 Perputaran (Rotasi)

Apakah kamu pernah melihat suatu benda berputar? Apa yang dimaksud dengan rotasi pada suatu benda? Bagaimana caramu menentukan koordinat bayangan hasil rotasi pada koordinat kartesius? Supaya kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan di atas lakukanlah kegiatan-kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 1 Rotasi Benda

Ayo Kita Amati

(a) (b) (c)

Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 3.3 Perputaran roda

Coba perhatikan roda yang berputar pada Gambar 3.3 di atas. Roda tersebut dapat diputar searah jarum jam seperti yang terlihat pada Gambar 3.3 (b) atau dapat diputar berlawanan arah jarum jam seperti yang terlihat pada Gambar 3.3 (c). Gerakan putaran roda merupakan salah satu contoh dari rotasi. Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Titik tetap ini disebut *pusat rotasi*. Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal disebut dengan *sudut rotasi*.

Beberapa benda dapat berotasi dengan pusat rotasi berada di dalam benda itu sendiri. Salah satu contohnya adalah Planet Bumi berputar atau berotasi pada porosnya. Pada pembelajaran terdahulu, kamu juga telah mempelajari bahwa beberapa benda memiliki simetri putar. Jika suatu bangun/gambar dapat dirotasikan kurang dari 360^o terhadap titik pusat rotasi sedemikian sehingga bayangan dan gambar awalnya sama, maka bangun/gambar tersebut memiliki **simetri putar**.

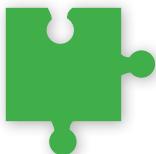
Sumber: http://www.fisikanet.lipi.go.id

Gambar di atas menunjukkan segi enam beraturan yang memiliki 6 bentuk yang sama jika diputar/dirotasikan. Karena segi enam setelah diputar kurang dari 360^o (termasuk 0^o) bentuknya sama seperti semula, maka segi enam memiliki **simetri putar tingkat enam**.

Jika suatu bangun setelah diputar satu putaran pada pusatnya dan bentuknya sama sepeti gambar awal setelah n putaran, maka bangun tersebut memiliki simetri putar tingkat n, untuk $n > 1$.

Sekarang coba kamu sebutkan sedikitnya 5 bangun yang memiliki simetri putar dan sebutkan bangun tersebut memiliki simetri putar tingkat berapa.

Kegiatan 2 Merotasi *Puzzle*

Ayo Kita Amati

Coba kamu amati *puzzle* di samping ini. Tariklah garis lurus dari titik *P* ke arah pusat *puzzle* tersebut. Rotasikan *puzzle* tersebut 270° searah jarum jam dengan pusat rotasi di titik *P*.

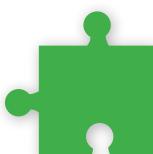
P

Puzzle mana yang menjadi hasil rotasinya?

A

B

C

D

Ayo Kita Gali Informasi

1. Jika *puzzle* tersebut dirotasikan 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi titik *P*, *puzzle* mana yang menjadi bayangan hasil rotasinya?
2. Jika *puzzle* tersebut dirotasikan 180° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi titik *P*, *puzzle* mana yang menjadi bayangan hasil rotasinya? Bagaimana jika *puzzle* tersebut dirotasikan 180° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi titik *P*, *puzzle* mana yang menjadi bayangan hasil rotasinya? Apakah hasilnya sama?
3. Apakah pilihan D merupakan hasil rotasi dari *puzzle* awal? Jika tidak, jenis transformasi apakah yang ditunjukkan oleh pilihan D terhadap *puzzle* awal?

Ayo Kita Menanya

Setelah kamu melakukan Kegiatan 2, buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut: rotasi, searah jarum jam, berlawanan jarum jam, sudut rotasi, dan pusat rotasi. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.

Kegiatan 3 Rotasi Titik pada Bidang Koordinat

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

1. Buatlah titik W (7, 7) dan titik A (5, 4). Gambar dan tentukan bayangan titik W dan A pada rotasi 90^o dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) searah jarum jam.
2. Gambar dan tentukan bayangan titik W dan A pada rotasi 90^o dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) berlawanan arah jarum jam.
3. Jika titik W dan A dirotasikan sejauh 180^o dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) searah jarum jam, berapakah koordinat bayangannya?
4. Apakah hasilnya sama jika kamu merotasikan titik tersebut sejauh 180^o dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) berlawanan arah jarum jam?

Kegiatan 4 Menggambar Rotasi Segitiga Pada Bidang Koordinat

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

Diketahui segitiga PQR memiliki koordinat di P (2, 3), Q (6, 3), dan R (5, 5). Gambarlah ΔPQR dan bayangannya yaitu $\Delta P'Q'R'$ pada rotasi 60^o berlawanan dengan arah berlawanan perputaran jarum jam terhadap titik asal O (0, 0). Ikuti langkah-langkah di bawah ini.

1. Pertama, gambar ΔPQR.
2. Gambar ruas garis dari titik asal ke titik P. Tariklah garis OP dengan O menunjukkan titik asal.

3. Gunakan busur untuk mengukur sudut 60º berlawanan arah jarum jam dengan *OP* sebagai salah satu sisinya.

4. Gambar garis *OT* sehingga *POT* membentuk sudut 60º.

5. Gunakan jangka untuk menyalin *OP* di *OT*. Beri nama garis *OP'*.

6. Ulangi langkah di atas untuk titik *Q* dan *R* sehingga didapatkan titik *Q'* dan *R'*. Hubungkan titik *P'*, *Q'* dan *R'* sehingga terbentuk segitiga *P'Q'R'*.

7. $\Delta P'Q'R'$ merupakan bayangan hasil rotasi 60º dari ΔPQR berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi di titik asal *O* (0, 0).

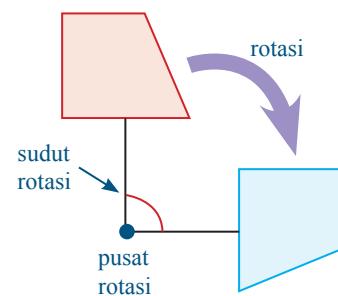
Bagaimana hasil bayangan dari ΔPQR jika dirotasikan 90º dan 180º searah jarum jam? Berapakah koordinat titik *P'*, *Q'* dan *R'* yang merupakan bayangan dari titik *P*, *Q*, dan *R*? Lakukan langkah-langkah yang sama seperti pada bagian Ayo Kita Mencoba.

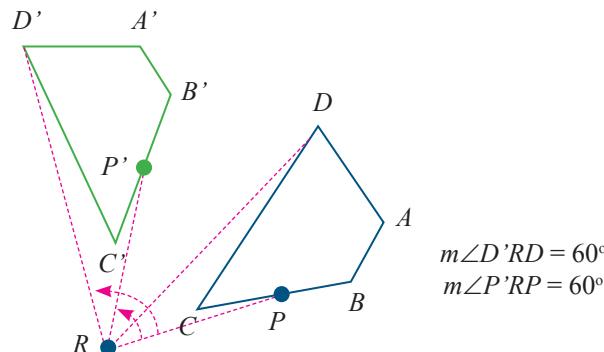
Setelah kamu menjawab pertanyaan pada bagian Ayo Kita Menalar, tuliskan jawabanmu di buku tulismu. Diskusikan jawabanmu dengan teman sebangkumu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.

Setelah kamu melakukan Kegiatan 4, apa yang dapat kamu simpulkan?

Jika sembarang titik (x, y) dirotasikan 90º dengan pusat rotasi titik asal *O* (0, 0) searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam bagaimana koordinat bayangan hasil rotasinya?

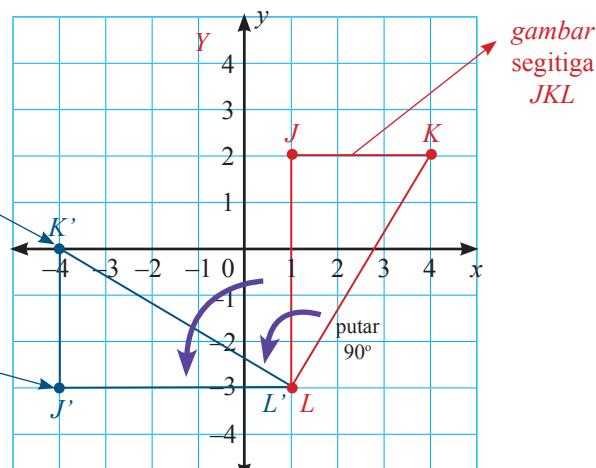
Jika sembarang titik (x, y) dirotasikan 180^o dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam bagaimana koordinat bayangan hasil rotasinya?

Isilah Tabel 3.6 untuk memudahkanmu menarik kesimpulan

Tabel 3.6 Koordinat Bayangan Hasil Rotasi

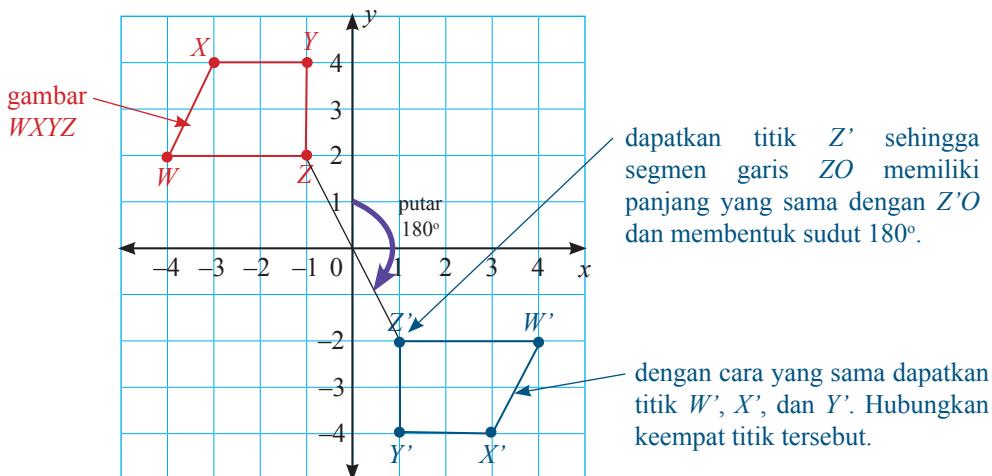
Titik koordinat	Pusat Rotasi	Sudut Rotasi	Arah Rotasi	Bayangan Hasil Rotasi
(2, 4)	(0, 0)	90^o	Searah jarum jam	...
(x, y)	(0, 0)	90^o	Searah jarum jam	...
(x, y)	(0, 0)	90^o	Berlawanan arah jarum jam	..
(7, 5)	(0, 0)	180^o	Berlawanan arah jarum jam	...
(x, y)	(0, 0)	180^o	Searah jarum jam	...
(x, y)	(0, 0)	180^o	Berlawanan arah jarum jam	...

Materi Esensi 3.3 Perputaran (Rotasi)

Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Titik tetap ini disebut pusat rotasi. Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal disebut dengan sudut rotasi.

Gambar di bawah ini menunjukkan rotasi bangun *ABCD* terhadap pusat rotasi, *R*. Besar sudut *ARA'*, *BRB'*, *CRC'*, dan *DRD'* sama. Sebarang titik *P* pada bangun *ABCD* memiliki bayangan *P'* di *A'B'C'D'* sedemikian sehingga besar $\angle PRP'$ konstan. Sudut ini disebut sudut rotasi.

Suatu rotasi ditentukan oleh arah rotasi. Jika *berlawanan arah* dengan arah perputaran jarum jam, maka *sudut putarnya positif*. Jika *searah* perputaran jarum jam, maka sudut putarnya *negatif*. Pada rotasi, bangun awal selalu kongruen dengan bayangannya.

Contoh 1 Menggambar Bayangan Segitiga Hasil Rotasi

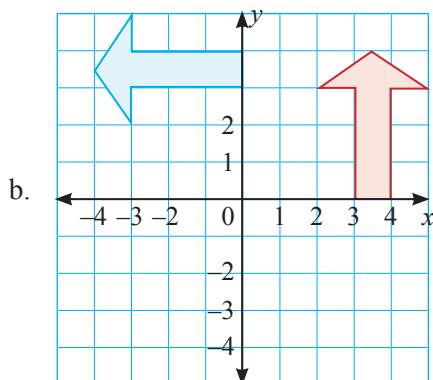
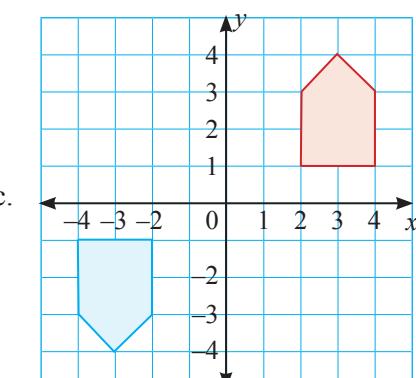
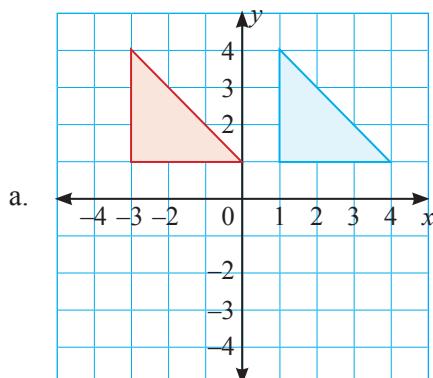
Tentukan bayangan segitiga *JKL* dengan koordinat *J* (1, 2), *K* (4, 2), dan *L* (1, –3) pada rotasi 90° berlawanan jarum jam dengan pusat rotasi adalah titik *L*.

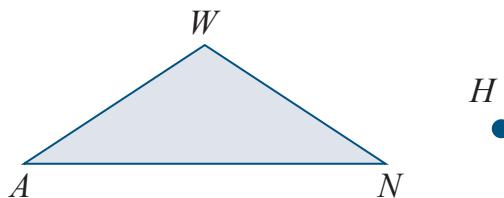
Penyelesaian:

Koordinat bayangannya *J'* (–4, –3), *K'* (–4, 0), dan *L'* (1, –3).

Contoh 2 — Menggambar Bayangan Trapesium Hasil Rotasi

Tentukan bayangan trapesium *WXYZ* dengan koordinat *W* (–4, 2), *X* (–3, 4), *Y* (–1, 4) dan *Z* (–1, 2) pada rotasi 180° dengan pusat rotasi *O* (0, 0).

Penyelesaian:

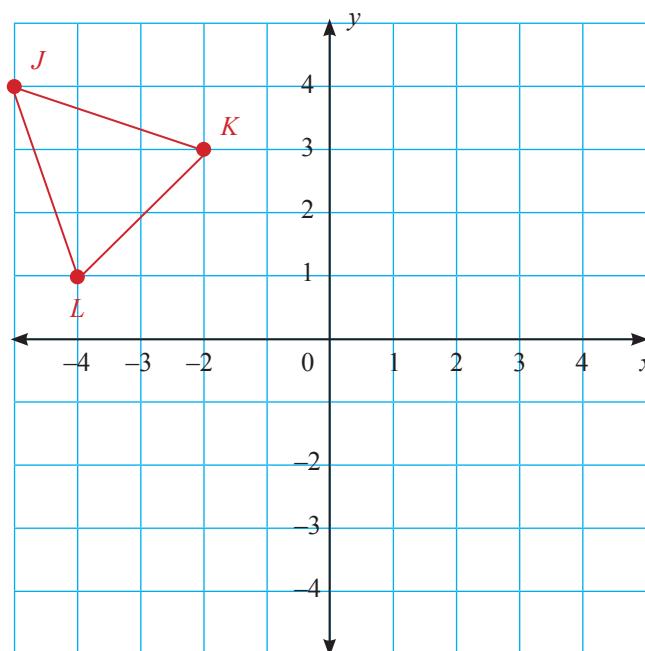
Koordinat bayangannya *W'*(4, –2), *X'* (3, –4), *Y'* (1, –4) dan *Z'* (1, –2).

Setelah kamu mengamati, menggali informasi, dan menanya, sekarang selesaikan permasalahan berikut.

Gambar bayangan rotasi dari Segi empat *ABCD* dengan *A* (–5, 4), *B* (–5, 1), *C* (–1, 1) dan *D* (–2, 4) berikut dengan sudut 90° jika diketahui arah rotasi berlawanan jarum jam dan pusat rotasi di titik *C*. Tentukan koordinat titik-titik bayangannya.

Latihan 3.3 — Perputaran (Rotasi)

1. Jelaskan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil rotasi dari gambar yang berwarna merah. Jika ya, dapatkan berapa besar sudut rotasi dan bagaimana arah dari rotasi tersebut.

a.

c.

b.

2. Segi empat *PQRS* berkoordinat di *P* (2, –2), *Q* (4, –1), *R* (4, –3) dan *S* (2, –4). Gambarlah bayangan *PQRS* pada rotasi 90° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal.

3. Salinlah Δ*WAN* berikut. Kemudian rotasikan segitiga tersebut sebesar 90° searah jarum jam yang berpusat di titik *H*.

4. Gambar bayangan rotasi setiap bangun berikut dengan sudut 90° jika diketahui arah dan pusat rotasi. Tentukan koordinat titik-titik bayangannya. Δ*WAN* dengan *W* (–4, 1), *A* (–2, 1), dan *N* (–4, –3) berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi di titik *N*.

5. Gambar bayangan tranformasi untuk setiap segitiga berikut dengan mencerminkan segitiga pada garis yang diketahui. Bayangan akhir dari setiap bangun juga merupakan hasil rotasi. Tentukan koordinat bayangan dan sudut rotasi.

   a. ΔTUV dengan T (4, 0), U (2, 3), dan V (1, 2) direfleksikan pada sumbu-y dilanjutkan sumbu-x.

   b. ΔKLM dengan K (5, 0), L (2, 4), dan M (–2, 4) direfleksikan pada garis $y = x$ dilanjutkan sumbu-x.

   c. ΔXYZ dengan X (5, 0), Y (3, 4), dan Z (–3, 4) direfleksikan pada garis $y = –x$ dilanjutkan garis $y = x$.

6. Diketahui segitiga JKL seperti pada gambar di bawah ini.

   a. Rotasikan segitiga JKL dengan sudut rotasi 90^o searah jarum jam dengan pusat rotasi titik asal (0, 0). Berapakah koordinat titik sudut dari segitiga $J'K'L'$ yang merupakan bayangan dari segitiga JKL?

   b. Rotasikan segitiga JKL dengan sudut rotasi180^o searah jarum jam dengan pusat rotasi titik asal (0, 0). Berapakah koordinat titik sudut dari segitiga $J'K'L'$ yang merupakan bayangan dari segitiga JKL?

7. Diketahui segitiga *RST* dengan koordinat titik sudut di *R* (3 ,6), *S* (–5, 2) dan *T* (3, –3). Gambar bayangan hasil transformasinya jika diketahui segitiga tersebut:

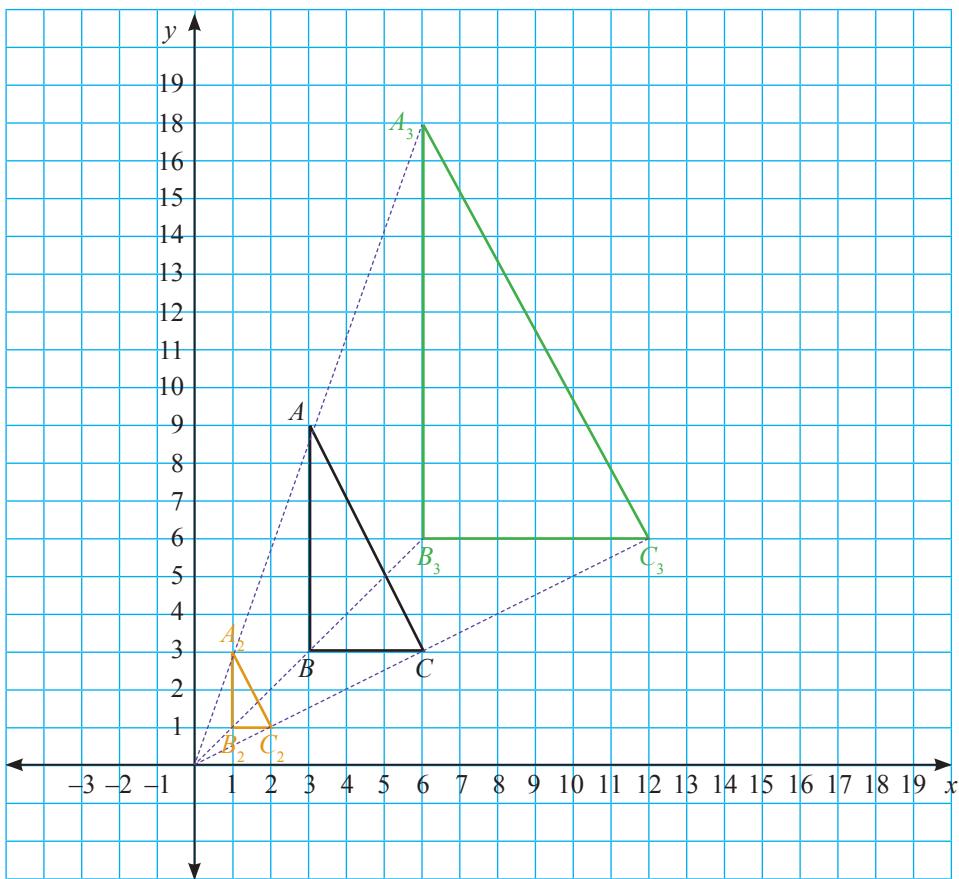
   a. Dirotasi 90° searah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian dicerminkan terhadap sumbu-*y*.

   b. Dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian didilatasi dengan faktor skala 2 berpusat di titik asal.

   c. Dirotasi 180° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian diitranslasi $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ setelah itu dicerminkan terhadap sumbu-*x*.

3.4 Dilatasi

Pertanyaan Penting

Semua transformasi yang telah kamu pelajari dalam bab ini menghasilkan gambar yang sama dengan gambar aslinya. Dilatasi merupakan jenis lain dari transformasi. Namun, bayangan dilatasi mungkin memiliki ukuran yang berbeda dari gambar aslinya. Dilatasi merupakan transformasi yang mengubah ukuran sebuah gambar. Dilatasi membutuhkan titik pusat dan faktor skala. Apa itu titik pusat dilatasi dan faktor skala? Lakukan kegiatan di bawah ini agar kamu dapat menjawab pertanyaan tersebut.

Kegiatan 1 Dilatasi Benda

Ayo Kita Amati

Gambar di bawah ini menunjukkan bagaimana dilatasi dapat menghasilkan bayangan yang lebih besar dan bayangan yang lebih kecil dari aslinya. Segitiga *ABC* didalatasi dengan pusat dilatasi titik awal *P* (0, 0) sehingga menghasilkan segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga $A_3B_3C_3$.

Ayo Kita Gali Informasi

Berapakah koordinat dari titik A, B, dan C? Berapakah koordinat dari titik A_2, B_2, dan C_2? Berapakah koordinat dari titik A_3, B_3, dan C_3?

Perhatikan segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga ABC. Berapakah panjang PA_2 jikadibandingkan dengan PA? Bagaimana dengan perbandingan kedua sisi yang lain? Apakah sama? Coba lengkapi bagian kosong di bawah ini untuk memudahkanmu melihat hubungan antara segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga ABC.

$$PA_2 = \ldots \times (PA)$$

$$PB_2 = \ldots \times (PB)$$

$$PC_2 = \ldots \times (PC)$$

Nilai ini selanjutnya disebut dengan faktor skala

Berapakah besarnya faktor skala segitiga $A_2B_2C_2$ yang merupakan hasil dilatasi dari segitiga *ABC*?

Dengan cara yang sama, berapakah faktor skala Segitiga $A_3B_3C_3$ yang merupakan hasil dilatasi segitiga *ABC*?

Segitiga *ABC* yang telah kamu amati pada Kegiatan 1, selanjutnya akan didilatasi dengan faktor skala 3. Berapa koordinat bayangan hasil dilatasi?

Setelah kamu melakukan Kegiatan 1, buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut: koordinat bayangan, dilatasi, dan faktor skala. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.

Kegiatan 2 Menggambar Bayangan Hasil Dilatasi

Diketahui segitiga *ABC* berkoordinat di *A* (7, 10), *B* (4, –6), dan *C* (–2, 3). Tentukan bayangan Δ*ABC* setelah didilatasi yang berpusat di titik asal dengan faktor skala 2. Gambar segitiga asal dan bayangannya. Ikuti langkah-langkah berikut ini:

Langkah 1 Gambar Δ*ABC* sesuai koordinatnya.

Langkah 2 Tentukan titik *A'* sehingga *OA'* = 2*OA*, titik *B'* sehingga *OB'* = 2*OB*, dan titik *C'* sehingga *OC'* = 2*OC*.

Langkah 3 Hubungkan titik-titik *A'*, *B'* dan *C'* menjadi Δ*A'B'C'*.

Berapakah koordinat titik *A'*, *B'* dan *C'*? Lengkapi bagian kosong di bawah ini untuk mengetahui hubungan antar titik *A'* dan *A*, *B'* dan *B*, serta titik *C'* dan *C*.

$$A' = (\ldots,\ldots) = (2 \times \ldots, 2 \times \ldots)$$

$$B' = (\ldots,\ldots) = (2 \times \ldots, 2 \times \ldots)$$

$$C' = (\ldots,\ldots) = (2 \times \ldots, 2 \times \ldots)$$

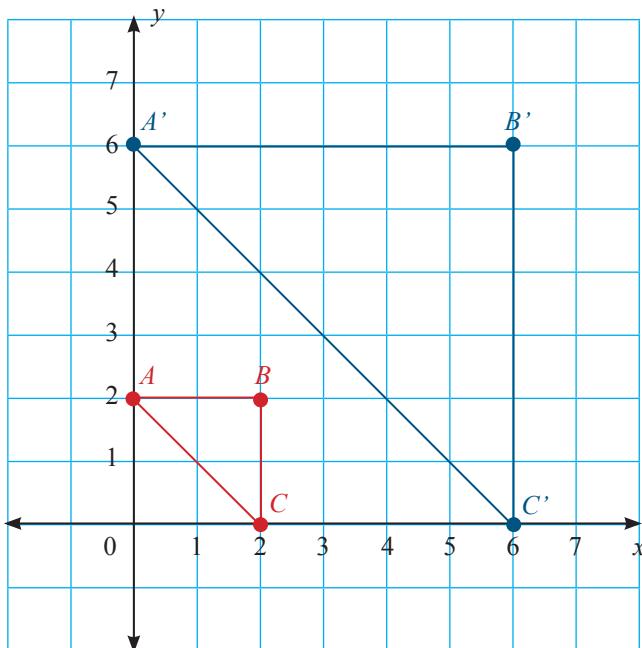
Nilai ini menunjukkan faktor skala

Nilai ini menunjukkan koordinat awal *ABC*

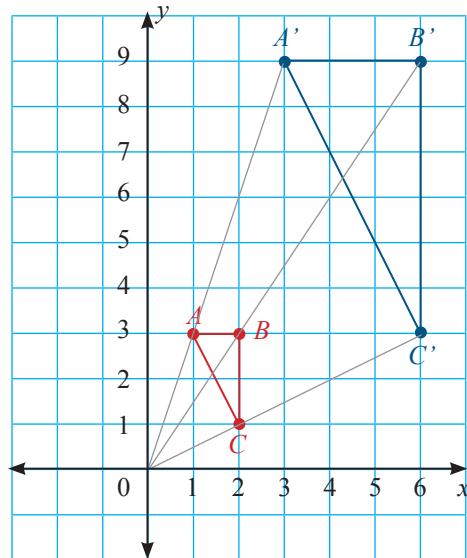
Berdasarkan Kegiatan 2, kamu telah mempelajari cara menentukan dilatasi dengan pusat di titik asal *O* (0, 0). Kamu dapat dengan mudah menentukan titik-titik koordinat bayangan dengan mengalikan titik koordinat asli dengan faktor skala. Bagaimana jika pusat dilatasi bukan di titik asal *O* (0, 0)? Jelaskan bagaimana caramu menentukan bayangan suatu bangun yang berpusat di suatu titik *P* (*a*, *b*).

Berdasarkan Kegiatan 1, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

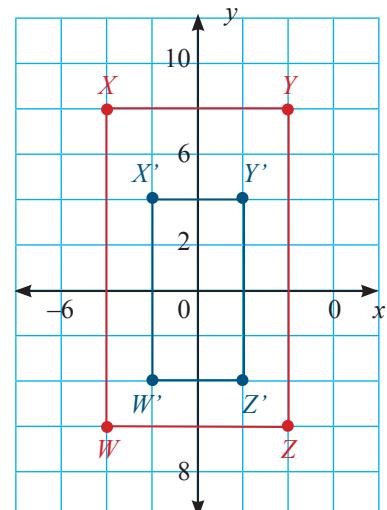
Setelah kamu melakukan beberapa kegiatan di atas, coba kamu buat kesimpulan dengan menjawab beberapa pertanyaan berikut ini.

1. Apa saja faktor yang menentukan dalam proses dilatasi?
2. Jika suatu titik *P* (*x*, *y*) didilatasi dengan pusat *O* (0, 0) dengan faktor skala *k*, bagaimana koordinat akhirnya?
3. Apakah pembesaran dan pengecilan suatu bangun termasuk dilatasi? Jika ya, bagaimana cara membedakannya?

Setelah kamu menjawab pertanyaan pada bagian Ayo Kita Simpulkan, tuliskan jawabanmu di buku tulismu. Diskusikan jawabanmu dengan teman sebangkumu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.

Materi Esensi 3.4 Dilatasi

Dilatasi terhadap titik pusat merupakan perkalian dari koordinat tiap-tiap titik pada suatu bangun datar dengan faktor skala sebesar k. Faktor skala menentukan apakah suatu dilatasi merupakan pembesaran atau pengecilan. Secara umum dilatasi dari suatu koordinat (x, y) dengan faktor skala k akan menghasilkan koordinat (kx, ky) atau dapat ditulis $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$. Ketika $k > 1$ maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pembesaran, tetapi jika $0 < k < 1$ maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pengecilan. Untuk memperbesar atau memperkecil bangun, letak pusat dilatasi dapat di dalam, di luar, atau pada tepi bangun yang akan didilatasikan.

Contoh 1 **Dilatasi Pada Segitiga dengan Pusat Dilatasi di Titik Asal**

Diketahui segitiga *ABC* dengan titik sudut masing-masing *A* (1, 3), *B* (2, 3), dan *C* (2, 1). Gambar segitiga *ABC* dan bayangannya setelah didilatasi dengan faktor skala 3 dengan pusat dilatasi titik awal.

Penyelesaian:

Titik sudut *ABC*	$(3x, 3y)$	Titik sudut *A'B'C'*
A (1, 3)	(3 × 1, 3 × 3)	*A'* (3, 9)
B (2, 3)	(3 × 2, 3 × 3)	*B'* (6, 9)
C (2, 1)	(3 × 2, 3 × 1)	*C'* (6, 3)

Contoh 2 **Dilatasi Pada Segi Empat dengan Pusat Dilatasi di Titik Asal**

Diketahui segi empat *WXYZ* dengan titik sudut masing-masing *W* (–4, –6), *X* (–4, 8), *Y* (4, 8) dan *Z* (4, –6). Gambar segi empat *WXYZ* dan bayangannya setelah didilatasi dengan faktor skala 0,5 dengan pusat dilatasi titik awal.

Penyelesaian:

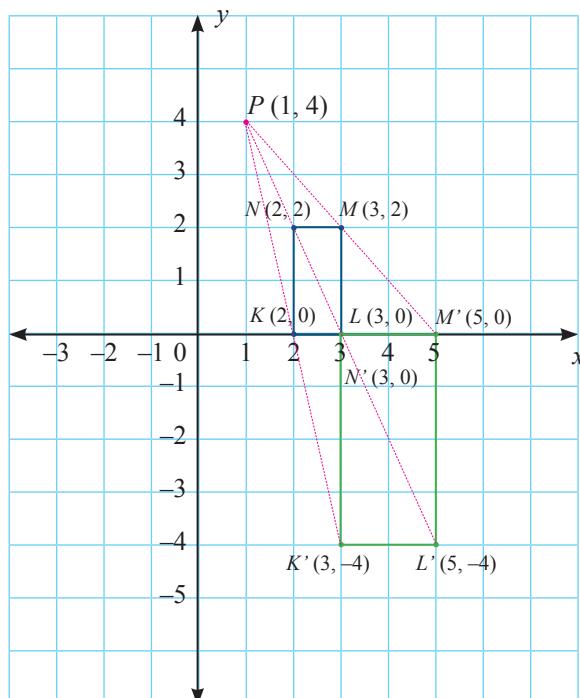
Titik sudut *WXYZ*	$(0{,}5x, 0{,}5y)$	Titik sudut *W'X'Y'Z'*
W (–4, –6)	(0,5 × (–4), 0,5 × (–6))	*W'* (–2, –3)
X (–4, 8)	(0,5 × (–4), 0,5 × 8)	*X'* (–2, 4)
Y (4, 8)	(0,5 × 4, 0,5 × 8)	*Y'* (2, 4)
Z (4, –6)	(0,5 × 4, 0,5 × (–6))	*Z'* (2, –3)

Contoh 3 **Dilatasi Pada Segi Empat dengan Pusat Dilatasi di Titik *P***

Persegi panjang *KLMN* berkoordinat di *K* (2, 0), *L* (3, 0), *M* (3, 2) dan *N* (2, 2). Tentukan koordinat *K'L'M'N'* yang merupakan bayangan dari persegi panjang *KLMN* setelah didilatasi dengan pusat dilatasi di titik *P* (1, 4) dan faktor skala 2.

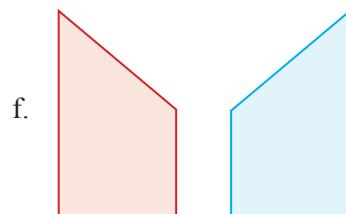
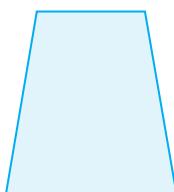
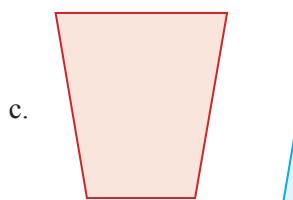
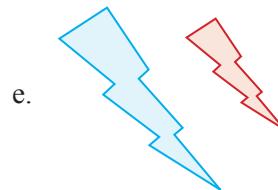
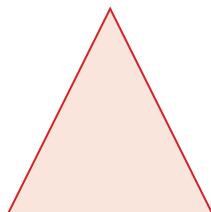
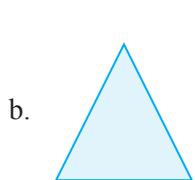
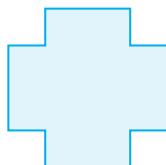
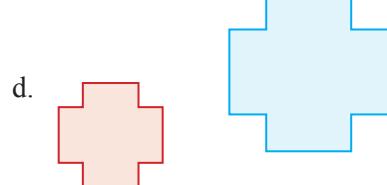
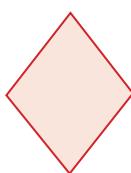
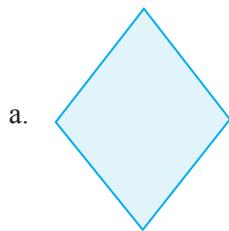
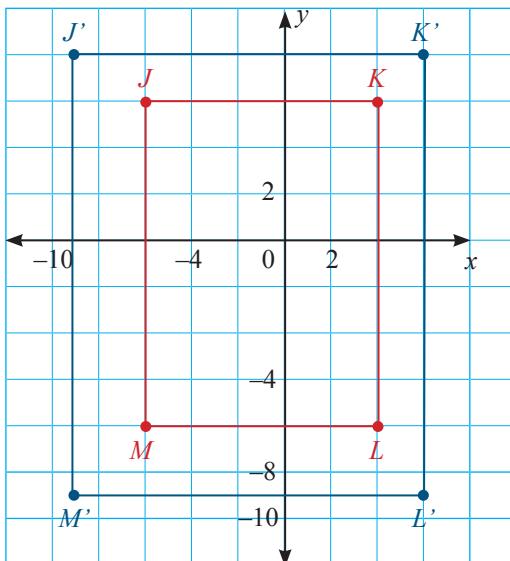
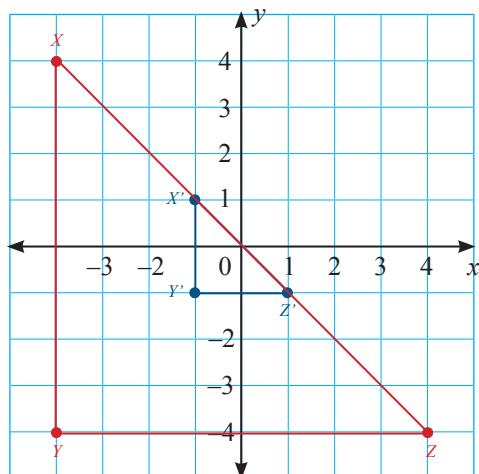
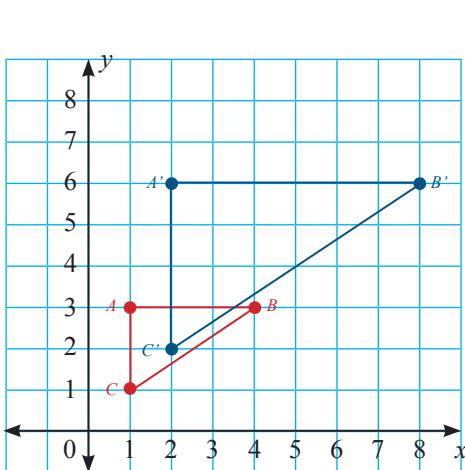
Penyelesaian

Langkah 1
Tentukan titik *P* dan gambar persegi panjang *KLMN* pada bidang koordinat.

Langkah 2
Buat garis dari titik *P* sehingga *PK'* = 2*PK*

PL' = 2*PL*, *PM'* = 2*PM*, dan *PN'* = 2*PN*.

Sehingga diperoleh titik-titik koordinat bayangan *K*, *L*, *M*, dan *N* adalah sebagai berikut.

K' (3, -4), *L* (5, –4), *M* (5, 0), dan *N'* (3, 0).

Langkah 3
Hubungkan titik-titik *K'*, *L'*, *M'*, dan *N'* sehingga terbentuk persegi panjang *K'L'M'N'*.

1. Bagaimana bentuk bayangan suatu bangun jika didilatasi dengan faktor skala yang bernilai negatif? Apakah arahnya berbeda jika dibandingkan dengan bayangan hasil dilatasi oleh faktor skala positif? Jelaskan.
2. ΔDEF berkoordinat di D (5, 8), E (–3, 4), dan F (–1, –6). Tentukan bayangan ΔDEF yang berpusat di titik asal dan faktor skala 3. Gambarlah ΔDEF sebelum dan sesudah didilatasi.

Latihan 3.4 Dilatasi

1. Tunjukkan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil dilatasi dari gambar yang berwarna merah. Berikan penjelasanmu.

2. Gambar yang berwarna biru merupakan hasil dilatasi dari gambar berwarna merah. Tentukan faktor skala dan jenis dilatasinya.

3. Titik sudut dari masing-masing bidang datar diberikan sebagai berikut. Gambar bidang datar yang dimaksud dan bayangannya setelah dilatasi dengan faktor skala yang diberikan masing-masing. Sebutkan jenis dilatasinya.

   a. A (1, 1), B (1, 4), dan C (3, 1) dengan faktor skala 4

   b. G (–2, –2), H (–2, 6), dan J (2, 6) dengan faktor skala 0,25

   c. Q (–3, 0), R (–3, 6), S (4, 6), dan T (4, 0) dengan faktor skala $\frac{1}{3}$

4. Garis TU berkoordinat di T (4, 2) dan U (0, 5). Setelah didilatasi, bayangan yang terbentuk memiliki koordinat di T' (6, 3) dan U' (12, 11). Tentukan faktor skala yang digunakan.

5. Segitiga KLM berkoordinat di K (12, 4), L (4, 8), dan M (8, –8). Setelah dua kali dilatasi berturut-turut yang berpusat di titik pusat dengan faktor skala yang sama, bayangan akhirnya memiliki koordinat K'' (3, 1), L'' (1, 2), dan M'' (2, –2). Tentukan faktor skala k yang digunakan untuk dilatasi ΔKLM menjadi $\Delta K''L''M''$.

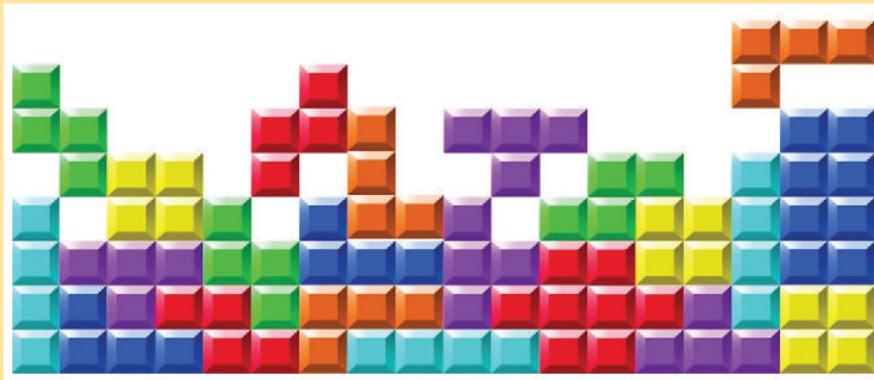
6. Gambar sebarang persegi pada bidang koordinat (kamu bebas menentukan panjang sisi dari persegi tersebut). Pilih faktor skala 2, 3, 4, dan 5 kemudian dilatasikan persegi yang telah gambar dengan masing-masing faktor skala tersebut. Gambar bayangan hasil dilatasi dengan masing-masing faktor skala. Hitung luas tiap-tiap persegi, baik persegi awal, maupun persegi hasil dilatasi dengan masing-masing faktor skala.

   a. Berapa kali lebih besar luas persegi hasil dilatasi dengan menggunakan masing-masing faktor skala jika dibandingkan dengan luas persegi awal?

   b. Bagaimana rumus untuk mementukan luas persegi hasil dilatasi jika diketahui panjang sisi dari persegi awal adalah r dan faktor skala k? (Dapatkan rumus tersebut tanpa harus menggambar bayangan hasil dilatasi, gunakan perbandingan pada jawaban a)

   c. Jika diberikan panjang sisi persegi awal 4 satuan, dan faktor skala 7. Berapa kali lebih besar luas persegi hasil dilatasi jika dibandingkan dengan luas persegi awal?

7. Gunakan lampu senter dan tanganmu untuk membuat bayangan kelinci pada dinding.

   a. Menurutmu mana yang lebih besar, apakah tanganmu yang asli atau bayangan tanganmu yang membentuk gambar kelinci?

b. Jika dihubungkan dengan dilatasi, merepresentasikan apakah lampu senter yang digunakan pada percobaan tersebut?

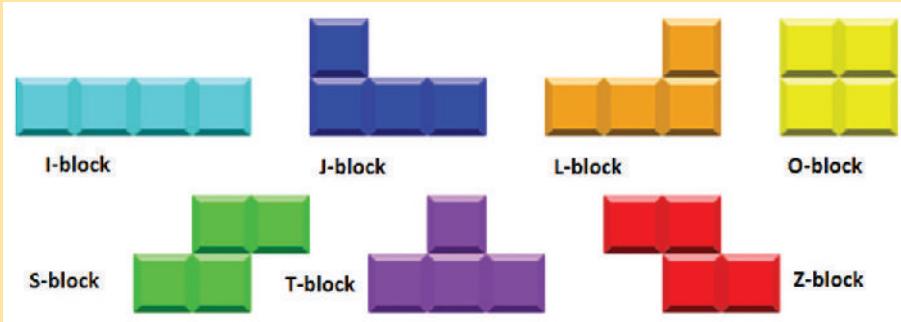
c. Berdasarkan hasil perhitungan diketahui bahwa panjang hari tangan 7 cm, sedangkan panjang bayangannya di dinding 14 cm. Berapakah faktor skalanya?

d. Jika tanganmu digerakkan mendekati lampu senter, menurutmu apa yang akan terjadi pada bayangannya di dinding? Apa hubungannya dengan faktor skala?

8. Diketahui segitiga *ABC* dengan koordinat titik sudut di *A* (6, 12), *B* (–9, 3) dan *C* (6, –6). Gambar bayangan hasil transformasinya jika diketahui segitiga tersebut:

   a. Didilatasi dengan menggunakan faktor skala $\frac{1}{3}$ dengan pusat titik asal kemudian dirotasi 90^{o} searah jarum jam yang berpusat di titik asal.

   b. Didilatasi dengan menggunakan faktor skala 2 dengan pusat titik asal kemudian diitranslasi $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ setelah itu dicerminkan terhadap sumbu-*y*.

Proyek 3

Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 anak.Sebagai tugas dari proyek kali ini, kalian akan membuat permainan tetris dengan versimu sendiri. Sebelum bekerja lebih jauh, kalian perlu mengetahui terlebih dahulu mengenai beberapa hal terkait tetris.Tetris (bahasa Rusia: Тетрис) merupakan teka-teki yang didesain dan diprogram oleh Alexey Pajitnov pada bulan Juni1985, pada saat ia bekerja di Pusat Komputer Dorodnicyn di Akademi Sains Uni Soviet di Moskow. Namanya berasal dari awalan numerik Yunani *tetra* yang bermakna bangun dengan empat bagian.

Permainan ini (atau variasi lainnya) terdapat pada hampir setiap konsol permainan video dan komputer pribadi. Walaupun *Tetris* muncul kebanyakan pada komputer rumahan, permainan ini lebih sukses pada versi Gameboy yang dirilis pada 1989 yang membuatnya sebagai permainan paling populer sepanjang masa. Pada berita Electronic Gaming Monthly ke-100, Tetris berada pada urutan pertama pada “Permainan Terbaik Sepanjang Masa”. Pada tahun 2007, Tetris berada di urutan kedua pada “100 Permainan Terbaik Sepanjang Masa” menurut IGN.

Gambar di atas merupakan contoh permainan tetris. Pada permainan ini berbagai macam tetromino yang terdiri dari empat balok akan jatuh. Tujuan dari permainan ini adalah bagaimana cara memanipulasi tetromino yang jatuh, dengan mengerakannya ke samping atau memutarnya, sehingga akan terbentuk garis horizontal tanpa celah, ketika sudah terbentuk, tetromino tersebut akan menghilang, sehingga tetromino diatasnya akan terjatuh. Ketika permainan berlanjut, tetromino tersebut akan jatuh lebih cepat. Permainan akan berakhir apabila tetromino berikutnya terhalang sehingga tidak bisa masuk.

Tetromino yang terdapat pada tetris terdiri atas 7 jenis, yaitu I-block, J-block, L-block, O-block, S-block, T-block, dan Z-block. Coba perhatikan gambar tetromino yang biasanya terdapat pada permainan tetris di bawah ini.

Setelah kalian mengetahui permainan dan cara kerja tetris, kini kalian akan membuat permainan tetris dari 7 jenis tetromino yang ada dengan menggunakan prinsip transformasi yang telah kalian pelajari pada bab ini.

Bahan

- Kertas karton putih sebagai papan permainan tetris berukuran 2 meter × 1 meter.

- Kertas karton berwarna biru muda sebagai pembentuk I-block
- Kertas karton berwarna biru tua sebagai pembentuk J-block
- Kertas karton berwarna orange sebagai pembentuk L-block
- Kertas karton berwarna kuning sebagai pembentuk O-block
- Kertas karton berwarna hijau muda sebagai pembentuk S-block
- Kertas karton berwarna ungu muda sebagai pembentuk T-block
- Kertas karton berwarna merah sebagai pembentuk Z-block
- Penggaris
- Spidol Hitam
- Kertas untuk mencatat jenis transformasi pada masing-masing tetromino

Langkah-langkah pembuatan permainan

1. Buatlah papan permainan tetris dengan menggunakan kertas karton berwarna putih, spidol hitam, dan penggaris seperti gambar di bawah ini

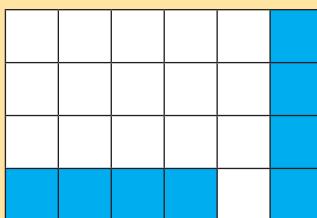
2. Papan permainan tetris berukuran 15 (pada sumbu vertikal) dan 20 (pada sumbu horizontal). Tiap-tiap 1 kotak dalam papan permaian tetris memiliki

ukuran 5 × 5 cm. Selanjutnya berikan label huruf pada sumbu vertikal dan abel angka pada sumbu horizontal (perhatikan contoh papan permainan tetris di atas). Tujuan dari pemberian label adalah untuk mengetahui posisi/koordinat dari masing-masing tetromino yang berada di dalam permainan.

3. Setelah kamu selesai membuat papan permaian tetris, selanjutnya kamu menbuat tetromino sesuai dengan warna yang telah ditentukan. Buatlah I-block dengan menggunakan kertas karton berwarna biru muda, J-block dengan menggunakan kertas karton berwarna biru tua, L-block dengan menggunakan kertas karton berwarna orange, O-block dengan menggunakan kertas karton berwarna kuning, S-block dengan menggunakan kertas karton berwarna hijau muda, T-block dengan menggunakan kertas karton berwarna ungu muda, dan Z-block dengan menggunakan kertas karton berwarna merah. Perhatikan bahwa ukuran dari tetromino haruslah sesuai dengan papan permainan tetris. Dengan demikian ukuran tiap-tiap kotak tetromino adalah 5 × 5 cm. Untuk tiap-tiap tetromino kalian diwajibkan membuat masing-masing 8 buah.

4. Setelah kamu selesai membuat tetromino, berikan label/nama pada masing-masing tetrimino dengan aturan berikut:
   - Untuk tetromino berbentuk I-block berikan label I-1 sampai dengan I-8
   - Untuk tetromino berbentuk J-block berikan label J-1 sampai dengan J-8
   - Untuk tetromino berbentuk L-block berikan label L-1 sampai dengan L-8
   - Untuk tetromino berbentuk O-block berikan label O-1 sampai dengan O-8
   - Untuk tetromino berbentuk S-block berikan label S-1 sampai dengan S-8
   - Untuk tetromino berbentuk T-block berikan label T-1 sampai dengan T-8
   - Untuk tetromino berbentuk Z-block berikan label Z-1 sampai dengan Z-8

5. Setelah masing-masing tetromino memiliki label, langkah berikutnya adalah kamu mencoba masing-masing tetromino tersebut benar-benar memiliki ukuran yang bersesuaian dengan papan permainan tetris. Cobalah untuk memutar dan menggeser masing-masing tetromino tersebut pada papan permaian tetris. Jika semua telah sesuai, maka permaian tetris siap untuk dimulai.

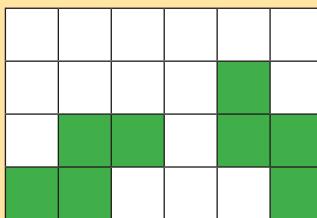
Langkah-langkah permainan

1. Pada permainan tetris ini, kamu hanya menggunakan 2 prinsip transformasi, yaitu rotasi dan translasi.

2. Pada bagian awal papan tetris dalam kondisi kosong (tidak ada tetromino sama sekali)

3. Selanjutnya perhatikan gambar di bawah ini

5. Pada permainan tetris, tetromino selalu muncul pada bagian paling atas dari papan permainan. Biasanya tetromino muncul secara acak. Namun pada permainan tetris kali ini, ada beberapa aturan terkait dengan kemunculan tetromino pada bagian atas papan permainan. Perhatikan gambar di atas yang menunjukkan koordinat atau posisi munculnya tetromino pada bagian atas papan permainan.

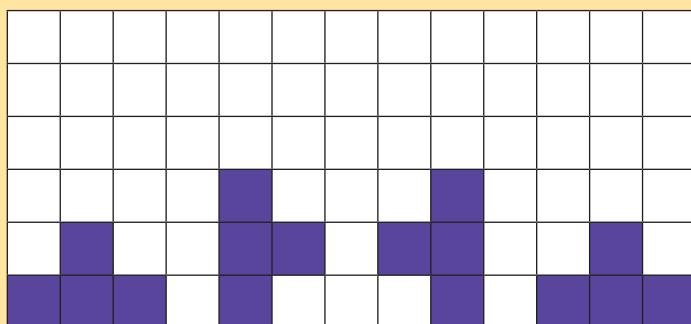
    - I-block selalu muncul pada koordinat A1, A2, A3, dan A4
    - O-block selalu muncul pada koordinat A5, A6, B5, dan B6
    - S-block selalu muncul pada koordinat A8, A9, B7, dan B8
    - T-block selalu muncul pada koordinat A10, B9, B10, dan B11
    - Z-block selalu muncul pada koordinat A11, A12, B12, dan B13
    - J-block selalu muncul pada koordinat A14, B14, B15, dan B16
    - L-block selalu muncul pada koordinat A19, B17, B18 dan B19

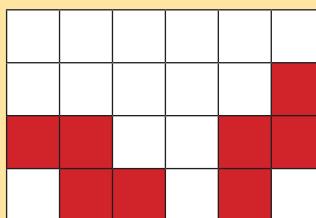
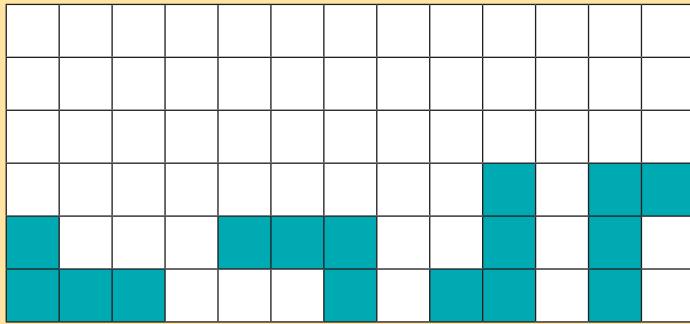
4. Urutan kemunculan dari tetromino yaitu I- block muncul pertama, kemudian diikuti oleh O-block pada urutan kedua, S-block pada urutan ketiga, T-block pada urutan keempat, Z-block pada urutan kelima, J-block pada urutan keenam, dan terakhir adalah L-block. Jika telah selesai, maka kembali lagi ke I-block, lalu O-block, dan seterusnya seperti urutan yang dijelaskan di atas. Permaian berhenti jika tetromino yang digunakan telah habis.

5. Langkah-langkah pada permainan ini yaitu:

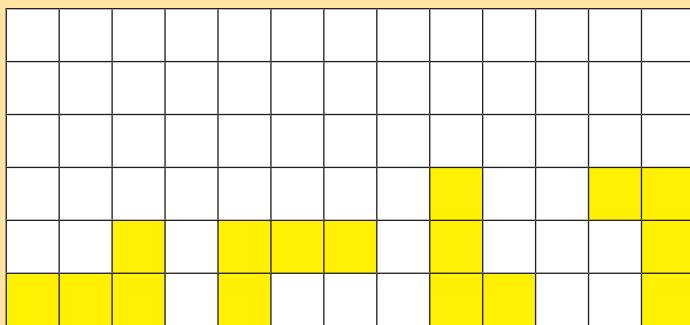
   a. I-block muncul terlebih dahulu kemudian pemain menggerakkan I-block hingga I-block menyentuh bagian paling bawah pada papan permaian tetris. Ketika I-block mencapai bagian bawah papan permaian tetris ada 2 kemungkinan posisi I-block, yaitu posisi horizontal dan vertikal. Perhatikan gambar di bawah ini.

   Pemain bebas menetukan pada posisi mana sebaiknya L-block diletakkan.

   b. Setelah I-block telah mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya muncul O-block. Pemain harus menggerakkan O-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana O-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di atas posisi dari I-block.

   c. Selanjutnya ketika O-block telah mencapai bagian bawah papan permainan maka muncul S-block. Pemain harus menggerakkan S-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana S-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika S-block mencapai bagian bawah papan permaian tetris ada 2 kemungkinan posisi S-block, yaitu posisi horizontal dan vertikal. Perhatikan gambar di bawah ini.

   Pemain bebas menetukan pada posisi mana sebaiknya S-block diletakkan.

   d. Ketika S-block telah mencapai bagian bawah papan permainan maka muncul T-block. Pemain harus menggerakkan T-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di

posisi mana T-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika T-block mencapai bagian bawah papan permaian tetris ada 4 kemungkinan posisi T-block, yaitu posisi horizontal ke atas, horizontal ke bawah, vertikal ke arah kanan, dan vertikal ke arah kiri. Perhatikan gambar di bawah ini.

Pemain bebas menetukan pada posisi mana sebaiknya T-block diletakkan.

e. Setelah T-block telah mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya muncul Z-block. Pemain harus menggerakkan Z-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana Z-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika Z-block mencapai bagian bawah papan permaian tetris ada 2 kemungkinan posisi Z-block, yaitu posisi horizontal dan vertikal. Perhatikan gambar di bawah ini.

Pemain bebas menetukan pada posisi mana sebaiknya Z-block diletakkan.

f. Ketika Z-block telah mencapai bagian bawah papan permainan maka muncul J-block. Pemain harus menggerakkan J-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana J-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika J-block mencapai bagian bawah papan permaian tetris ada 4 kemungkinan posisi T-block. Perhatikan gambar berikut ini.

Pemain bebas menetukan pada posisi mana sebaiknya J-block diletakkan.

g. Setelah J-block telah mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya muncul L-block. Pemain harus menggerakkan L-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana L-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika L-block mencapai bagian bawah papan permaian tetris ada 4 kemungkinan posisi L-block. Perhatikan gambar di bawah ini.

Pemain bebas menetukan pada posisi mana sebaiknya L-block diletakkan.

h. Setelah L-block mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya kembali muncul I-block, kemudian diikuti oleh O-block, S-block, T-block, Z-block, J-block, dan terakhir L-block. Jika telah selesai, maka kembali lagi ke I-block, lalu O-block, dan seterusnya seperti urutan yang dijelaskan sebelumnya. Permainan berhenti jika tetromino yang digunakan telah habis.

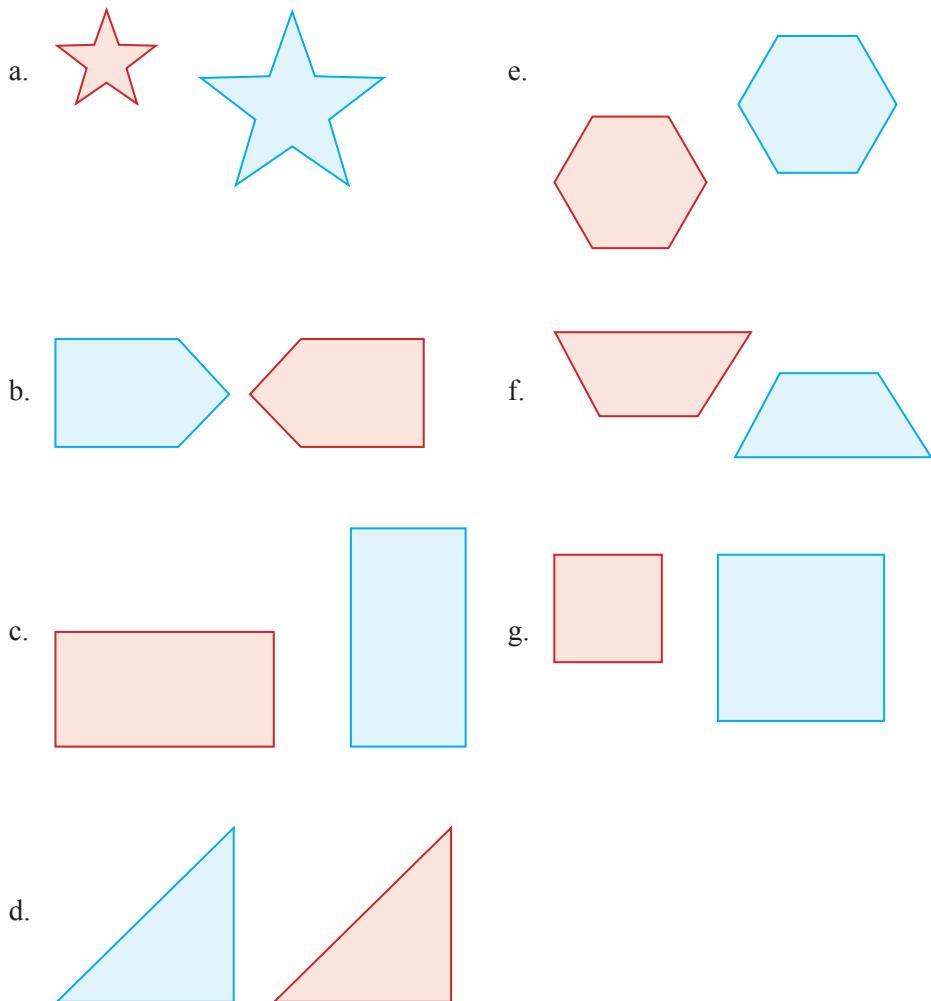
6. Syarat dari permaian ini yaitu :

- Tidak boleh ada kotak yang kosong di sela-sela tetromino
- Jika baris bagian bawah dari papan permainan telah penuh, kamu dapat mengisi baris pada bagian yang berada pada posisi lebih atas

- Jika baris bagian bawah dari papan permainan telah penuh, kamu dapat mengisi baris pada bagian yang berada pada posisi lebih atas
- Kamu tidak diperbolehkan mengubah urutan dan posisi awal dari kemunculan tetromino
- Kamu hanya diperbolehkan melakukan rotasi dan translasi pada masing-masing tetromino
- Permainan berhenti jika tetromino telah habis

Tugas

Sediakan kertas untuk mencatat, lalu buatlah tabel seperti di bawah ini

No.	Nama/Label Tetromino	Urutan Translasi
1.	I-1	...
2.	O-1	...
3.	S-1	...
4.	⋮	⋮

Jelaskan rangkaian urutan translasi yang dilakukan oleh masing-masing tetromino dari awal kemunculan hingga mencapai posisi akhir. Catatlah pada tabel di atas. Sajikan hasilmu tersebut di depan kelas.

Uji Kompetensi 3 Transformasi

1. Diketahui gambar berwarna biru merupakan bayangan hasil trasnformasi dari gambar berwarna merah. Tentukan jenis transformasinya.

   a.

   b.

   c.

   d.

   e.

   f.

   g.

2. Gambar setiap bangun berikut beserta bayangan hasil refleksi yang diberikan.

   a. Garis *MN* dengan *M* (3, 5) dan *N* (–2, –4) direfleksikan terhadap sumbu-*x*.

   b. Δ*RST* yang berkoordinat di *R* (2, –3), *S* (4, 5), dan *T* (–4, 6) direfleksikan terhadap sumbu-*y*.

c. ΔKLM yang berkoordinat di K (2, 5), L (3, –4), dan M (–4, –7) direfleksikan terhadap titik asal.

d. Segi empat $ABCD$ dengan A (–1, –2), B (2, –3), C (6, 3), dan D (–4, 2) direfleksikan terhadap garis $y = x$.

e. Garis FG dengan F (–4, 6) dan G (7, –9) direfleksikan terhadap garis $y = –x$.

3. Diketahui titik C (u, v) dicerminkan terhadap garis $x = 2$ menghasilkan bayangan di titik C' (5, 7). Maka nilai $u + v$ adalah ....

4. Diketahui segi empat TUVW berkoordinat T (3, 2), U (1, –4), V (–2, –3) dan W (–2, 4). Gambar bayangan segi empat $TUVW$ setelah ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan dicerminkan terhadap garis $y = x$.

5. Diketahui titik sudut sebuah segitiga yaitu I (–2, –1), J (–1, –4), dan K (–4, –1). Gambar bangun tersebut dan bayangannya dengan menggunakan translasi berikut ini.

   a. 3 satuan ke kanan dan 4 satuan ke atas

   b. $(x – 2, y + 5)$

   c. 5 satuan ke kiri dan 7 satuan ke bawah

   d. $\begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$

6. Diketahui segi empat $ABCD$ dengan koordinat titik sudut di A (2, 5), B (–3, 4), C (4, 3) dan D (4, –2). Gambar bayangan hasil transformasinya jika diketahui segi empat tersebut:

   a. Ditranslasi 3 satuan ke kanan dan 5 satuan ke bawah kemudian dicerminkan terhadap sumbu-x.

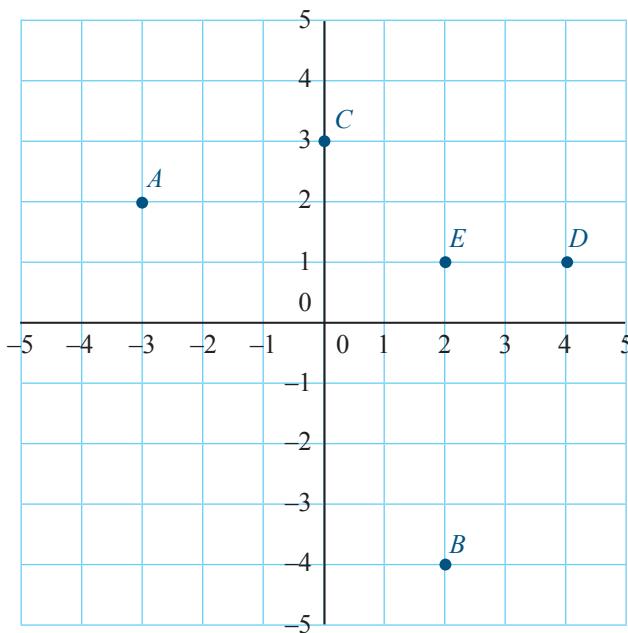
   b. Dirotasi 90^{o} berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian ditranslasi $(x – 3, y + 2)$.

   c. Ditranslasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ kemudian didilatasi dengan faktor skala 2 dan berpusat di titik asal.

7.

PAPAN TULIS

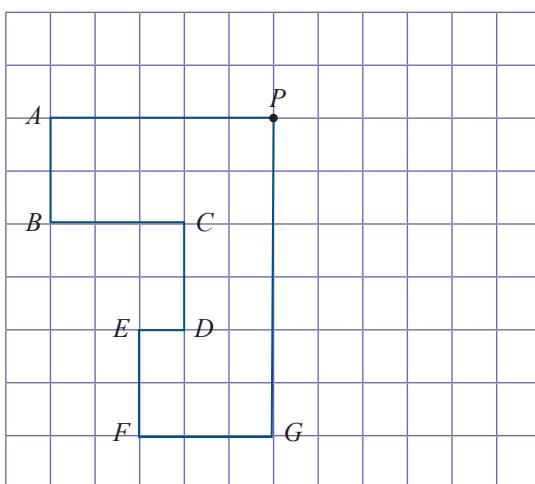
Andre	Joko	Vivi	Devi	Alex	Dian
Dani	Supri	Dimas	Santi	Sumi	Steven
Paul	Panca	Wawan	Winda	Nita	Budi
Wiwin	Andy	Bernard	Ivanka	Hafid	Putri
Boy	Fahim	Subchan	Surya	Endah	Udin

KIRI ⟺ KANAN

Perhatikan denah susunan tempat duduk kelas 9A SMP Ceria di atas pada minggu lalu. Pada minggu lalu Wawan duduk pada posisi nomor 3 dari depan dan lajur ke-3 dari kiri. Pada minggu ini Wawan berpindah pada bangku yang ditempati oleh Putri.Sedangkan Putri berpindah pada bangku yang ditempati oleh Winda, kemudian Winda berpindah pada bangku paling kiri belakang dan Boy menempati bangku yang diisi oleh Wawan pada minggu lalu.

a. Jika pergeseran (translasi) posisi tempat duduk bernilai positif jika bergeser ke depan dan ke kanan serta bernilai negatif jika bergeser ke belakang dan ke kiri, maka tentukan pasangan bilangan translasi yang menunjukkan perpindahan posisi tempat duduk dari Wawan, Putri, Winda, dan Boy.

b. Jika Andre melakukan translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, bangku milik siapa yang ditempati oleh Andre pada minggu ini?

c. Jika Ivanka, Dani, dan Alex masing-masing ingin bertukar posisi tempat duduk dengan syarat masing-masing siswa tidak diperbolehkan menempati posisi miliknya pada minggu lalu, tentukan 2 kemungkinan translasi yang dilakukan oleh masing-masing siswa tersebut.

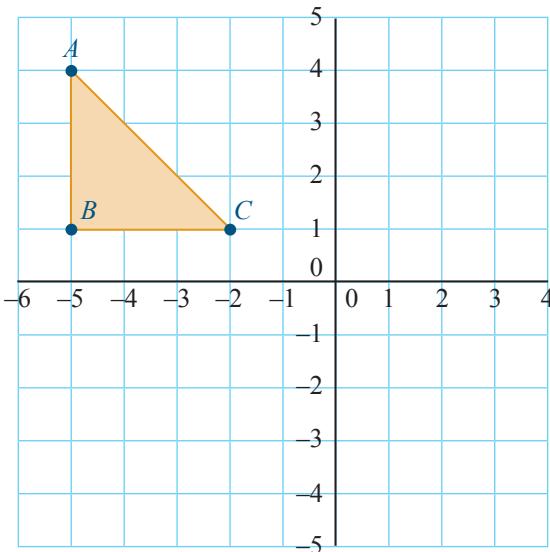
d. Jika Paul dan Fahim ingin bertukar bangku, tuliskan translasi yang dilakukan oleh masing-masing siswa tersebut.

8. Pada bulan Desember 2015 terjadi kecelakaan kapal yang menyebabkan kapal tersebut hampir tenggelam. Berdasarkan hasil pemantauan di sekitar lokasi, diperkirakan ada 3 koordinat lokasi kemungkinan terjadinya kecelakaan tersebut yaitu di titik *B*, *C*, dan *D*. Titik *A* menunjukkan koordinat kapal tim SAR.

   a. Tentukan translasi yang harus dilakukan oleh kapal tim SAR jika ingin menuju titik *B*, *C*, dan *D*.

   b. Berdasarkan perhitungan oleh tim ahli, kemungkinan terbesar lokasi kecelakaan kapal berada pada radius 4 satuan dari posisi kapal tim SAR saat ini. Menurutmu pada titik mana kemungkinan terbesar terjadinya lokasi kecelakaan?

   c. Selain menggunakan kapal tim SAR, diketahui ada kapal lain, yaitu kapal Marina Emas, yang dapat membantu para korban di lokasi kecelakaan kapal (lokasi kecelakaan kapal berdasarkan jawabanmu pada poin b) dengan posisi koordinat di titik *E*. Menurutmu, kapal mana yang akan terlebih dahulu sampai ke lokasi terjadinya kecelakaan? Jelaskan.

9. Diketahui garis *RD* berkoordinat di *R* (2, 5) dan *D* (–3, –1).

   a. Gambar bayangan garis *RD* setelah dilakukan rotasi 90^o searah jarum jam dan berpusat di titik asal.

b. Gambar bayangan garis *RD* setelah rotasi 180^{o} berlawanan arah jarum jam dan berpusat di titik asal.

10. Perhatikan gambar di bawah ini.

Gambar bayangan hasil rotasi bangun datar tersebut terhadap titik *P* dengan sudut rotasi yang ditentukan

a. Rotasi 90^{o} searah jarum jam

b. Rotasi 180^{o} searah jarum jam

c. Rotasi 90^{o} berlawanan arah jarum jam

d. Rotasi 270^{o} searah jarum jam

e. Rotasi 450^{o} searah jarum jam

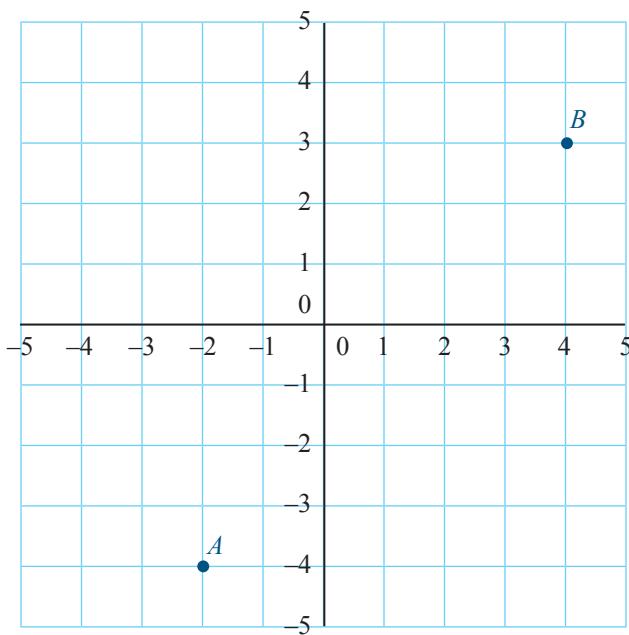
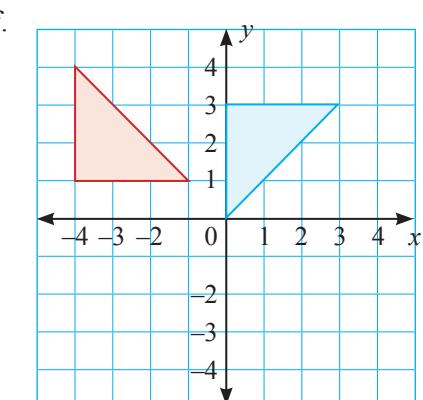
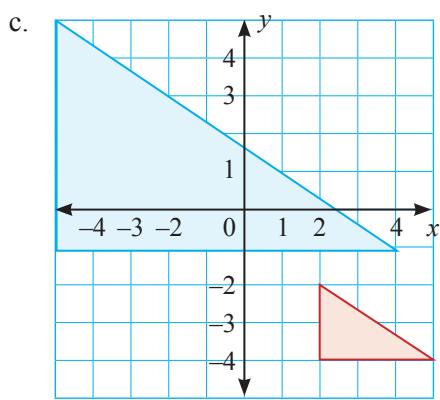
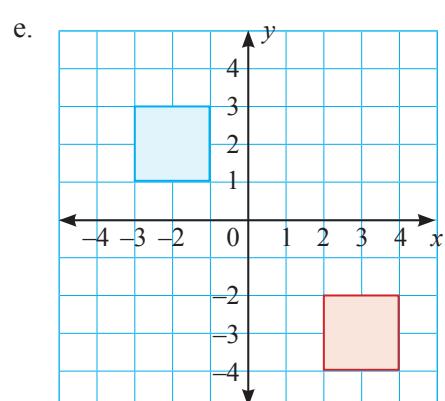
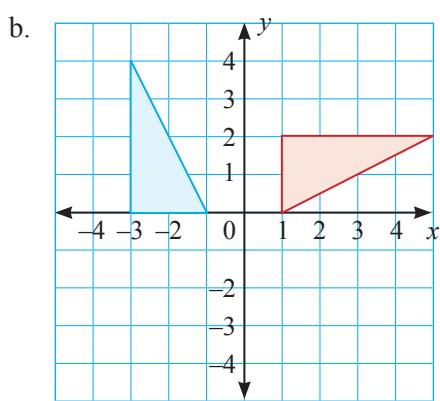
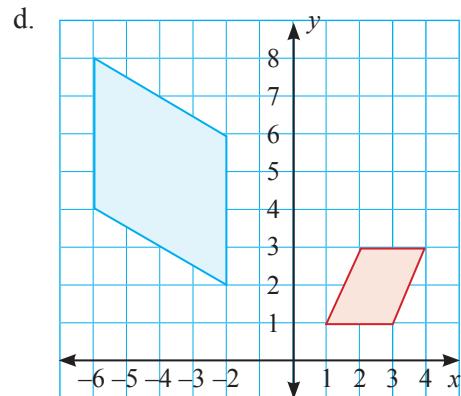
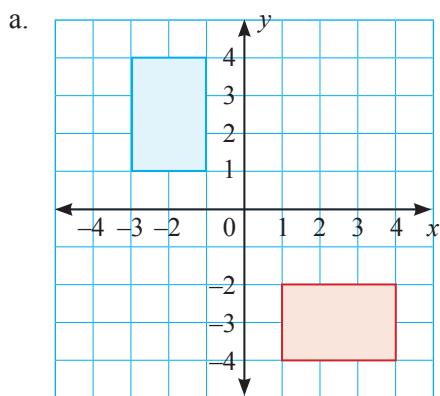
11. Diketahui titik sudut dari tiap-tiap bangun datar sebagai berikut. Rotasikan bangun datar berikut dan gambar bayangannya (pusat rotasi di titik asal).

a. A (3, –2), B (–4, –5), C (–4, 3) dan D (3, 4) dirotasikan 90^{o} searah jarum jam

b. I (3, 5), J (–3, 4) dan K (5, –3) dirotasikan 180^{o} searah jarum jam

c. P (3, 4), Q (–3, 2), R (–4, –6) dan S (5, –3) dirotasikan 90^{o} berlawanan arah jarum jam

d. K (4, 7), L (–3, 5), M (–5, –7) dan N (4, –2) dirotasikan 270^{o} searah jarum jam

12.

Perhatikan ΔABC pada gambar di atas. Gambarlah bayangan hasil transformasinya jika diketahui ΔABC tersebut

a. Dicerminkan terhadap garis $y = 1$ kemudian ditranslasi $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

b. Dicerminkan terhadap garis $x = 1$ kemudian dirotasi 90^o searah jarum jam yang berpusat di titik asal

c. Dicerminkan terhadap sumbu-y kemudian dirotasi 180^o searah jarum jam yang berpusat di titik asal dan ditranslasi $(x - 2, y + 4)$

13. Diketahui titik sudut dari tiap-tiap bangun datar seperti berikut. Gambar bangun datar berikut beserta bayangan hasil dilatasi dengan faktor skala yang diberikan (pusat dilatasi titik asal). Sebutkan jenis dilatasi pada masing-masing bangun datar

a. A (2, –2), B (–2, 5), C (4, 2), $k = 3$

b. I (4, 8), J (–8, 12) dan K (16, –8), $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. P (1, 1), Q (–2, 3), R (–1, –3) dan S (3, –3), $k = 4$

d. K (2, 4), L (–4, 4), M (–8, –6) dan N (4, –6), $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

14. Seorang bajak laut sedang berburu harta karun. Sang asisten ingin membantu bajak laut untuk mendapatkan harta karun tersebut. Berdasarkan peta yang mereka dapatkan, diketahui bahwa lokasi harta karun berada pada titik B, sedangkan posisi

bajak laut dan asistennya saat ini di titik A. Dengan menggunakan transformasi berikut ini maka bajak laut akan menemukan harta karun yang dicarinya. Akan tetapi tidak semua transformasi di bawah ini dapat digunakan dengan tepat untuk membantu sang bajak laut. Jika kamu menjadi asisten langkah-langkah transformasi apa saja yang akan kamu lakukan? Gunakan masing-masing transformasi berikut ini tepat satu kali.

a. Rotasi 180° searah jarum jam yang berpusat di titik asal

b. Pencerminan terhadap sumbu-y

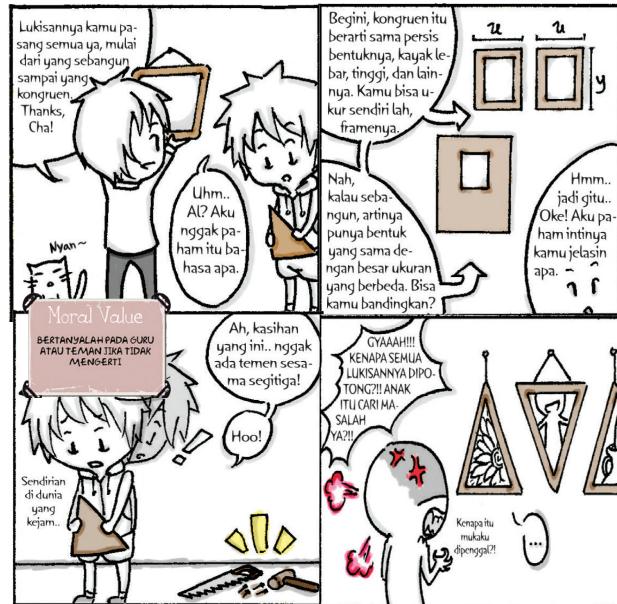
c. Pencerminan terhadap sumbu-x

d. Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal

e. Translasi 1 langkah ke atas

f. Translasi 2 langkah ke kanan dan 2 langkah ke bawah

15. Bangun berwarna biru merupakan bayangan hasil transformasi dari bangun berwarna merah. Sebutkan langkah-langkah tranformasi yang dilakukan terhadap bangun berwarna merah sehingga diperoleh bayangan berupa bangun berwarna biru.

Bab IV Kekongruenan dan Kesebangunan

Kata Kunci

- *Kongruen*
- *Faktor Skala*
- *Sebangun*

Kompetensi Dasar

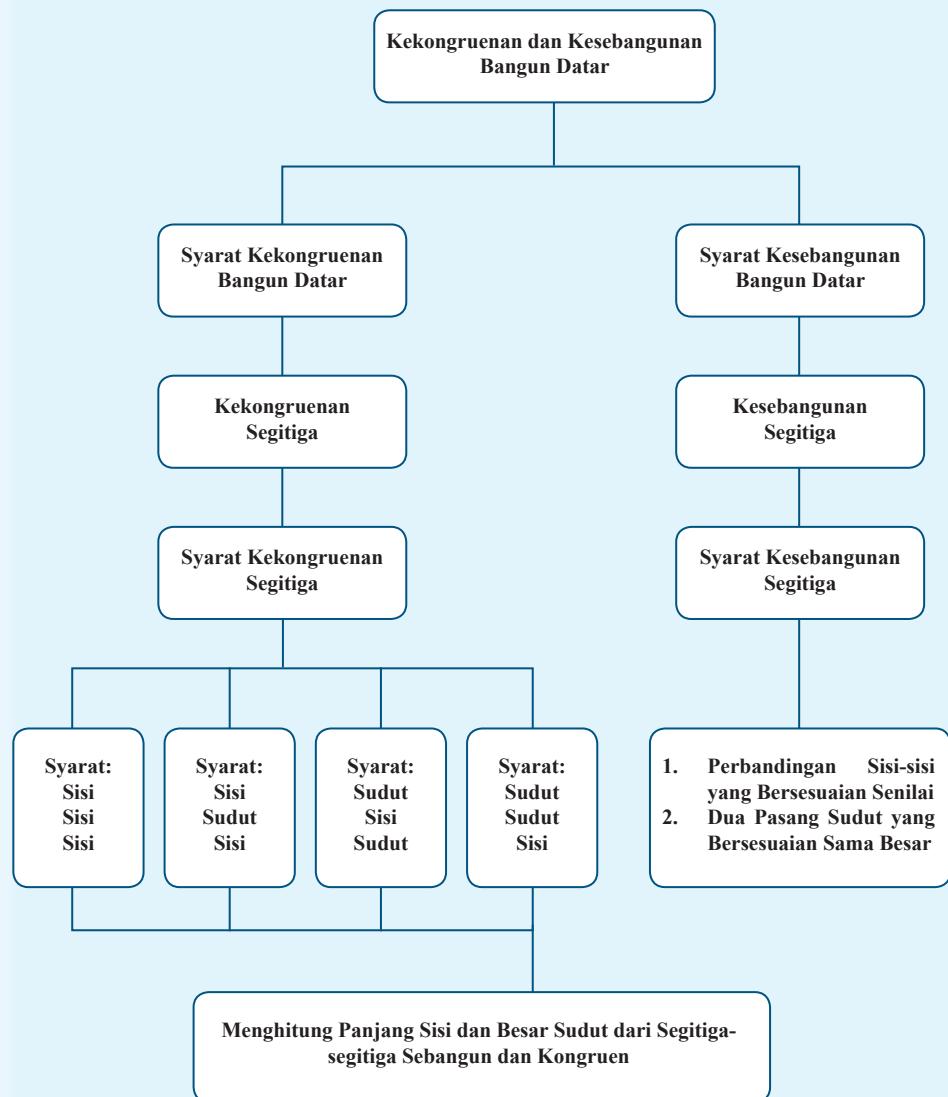
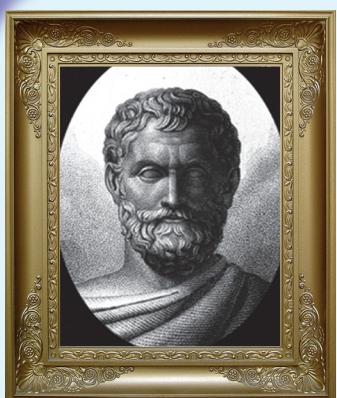
3.6 *Menjelaskan dan menentukan kesebangunan dan kekongruenan antarbangun datar.*

4.6 *Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesebangunan dan kekongruenan antarbangun datar.*

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Coba amatilah pigura foto presiden RI dan wakilnya yang ada di kelasmu. Apakah bentuk dan ukurannya sama? Bagaimana pigura tersebut dibanding pigura lukisan atau dibanding dengan papan tulis yang ada di kelasmu, apakah sebangun?

Pernahkah kamu membayangkan bagaimana memperkirakan ukuran tinggi pohon, tiang bendera, atau gedung tanpa harus mengukurnya secara langsung? Bagaimana mengukur lebar sungai atau danau tanpa harus mengukurnya secara langsung? Semua itu merupakan beberapa contoh manfaat konsep kekongruenan dan kesebangunan geometri dalam kehidupan sehari-hari.

Nah, masalah-masalah tersebut di atas dapat diselesaikan dengan konsep kekongruenan dan kesebangunan. Konsep ini akan kita pelajari bersama dalam Bab IV ini.

Pengalaman Belajar

1. *Mengidentifikasi, mendeskripsikan, menjelaskan sifat atau karaketristik benda dengan permukaan yang kongruen atau sebangun berdasarkan hasil pengamatan.*
2. *Membuat model, menggambar atau melukis, dan menentukan bangun-bangun datar yang kongruen atau sebangun dengan berbagai cara dan posisi.*
3. *Menguji dua segitiga sebangun dan dua segitiga kongruen.*
4. *Menentukan panjang sisi, besar sudut, atau unsur lainnya berkaitan dengan bangun datar yang kongruen atau sebangun dan menyelesaikan permasalahan nyata yang terkait dengan konsep kekongruenan dan kesebangunan.*

Peta Konsep

Kekongruenan dan Kesebangunan Bangun Datar
Syarat Kekongruenan Bangun Datar
Syarat Kesebangunan Bangun Datar
Kekongruenan Segitiga
Kesebangunan Segitiga
Syarat Kekongruenan Segitiga
Syarat Kesebangunan Segitiga
Syarat: Sisi Sisi Sisi
Syarat: Sisi Sudut Sisi
Syarat: Sudut Sisi Sudut
Syarat: Sudut Sudut Sisi
1. Perbandingan Sisi-sisi yang Bersesuaian Senilai
2. Dua Pasang Sudut yang Bersesuaian Sama Besar
Menghitung Panjang Sisi dan Besar Sudut dari Segitiga-segitiga Sebangun dan Kongruen

Sumber: www.windows2universe.org

Thales

Thales merupakan salah seorang filsuf Yunani yang hidup pada abad ke-6 SM. Ia (624-546 SM) lahir di kota Miletus. Awalnya, Thales adalah seorang pedagang, profesi yang membuatnya sering melakukan perjalanan. Kondisi kota Miletos yang cukup makmur memungkinkan orang-orang di sana untuk mengisi waktu dengan berdiskusi dan berpikir tentang segala sesuatu yang ada di sekitar mereka, sehingga banyak para filsuf Yunani pertama yang lahir di tempat ini. Pemikiran Thales dianggap sebagai kegiatan berfilsafat pertama karena ia mencoba menjelaskan dunia dan gejala-gejala di dalamnya dengan menggunakan rasio manusia dan tidak bergantung pada mitos yang berkembang di masyarakat. Ia juga dikenal sebagai salah satu dari Tujuh Orang Bijaksana (dalam bahasa Yunani disebut dengan *hoi hepta sophio*), yang oleh Aristoteles diberi gelar 'filsuf yang pertama'.

Thales juga dikenal sebagai ahli geometri, astronomi, dan politik. Pada bidang matematika, Thales mengungkapkan salah satu gagasan yang cukup fenomenal, yakni di bidang kesebangunan. Diceritakan bahwa dia dapat menghitung tinggi piramida dengan menggunakan bantuan dari bayangan suatu tongkat. Thales menggunakan kenyataan bahwa segitiga yang dibentuk oleh piramida dan bayangannya sebangun dengan segitiga kecil yang dibentuk oleh tongkat dan bayangannya. Dengan menggunakan perbandingan kesebangunan dua segitiga itu ia dapat memperkirakan tinggi dari piramida tersebut.

Selain itu, dia juga dapat mengukur jauhnya kapal di laut dari pantai. Kemudian Thales menjadi terkenal setelah dia berhasil memprediksi terjadinya gerhana matahari pada tanggal 28 Mei atau 30 September tahun 609 SM. Dia dapat melakukan prediksi tersebut karena dia telah mempelajari catatan-catatan astronomis yang tersimpan di Babilonia sejak tahun 747 SM. Thales tidak meninggalkan cukup bukti tertulis mengenai pemikiran filsafatnya. Pemikirannya didapatkan melalui tulisan Aristoteles tentang dirinya. Aristoteles mengatakan bahwa Thales adalah orang yang pertama kali memikirkan tentang asal mula terjadinya alam semesta. Oleh karena itu, Thales juga dianggap sebagai perintis filsafat alam (*natural philosophy*).

Sumber: www.wikipedia.com dan Ensiklopedia Matematika, 2013)

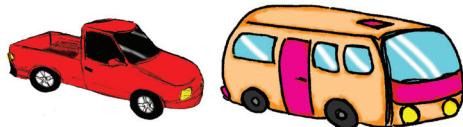
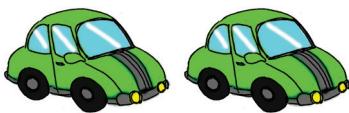
Hikmah yang bisa diambil

1. Thales adalah orang yang mempunyai rasa ingin tahu yang sangat tinggi. Dia selalu memikirkan setiap kejadian alam yang ada di sekitarnya dan mencari tahu penyebabnya. Ia mencoba memprediksi gerhana matahari dengan menggunakan ilmu pengetahuan yang telah dia pelajari tanpa bersandar pada mitos yang ada.
2. Tidak mudah puas terhadap sesuatu yang sudah didapatkan, sehingga terus berfikir melakukan inovasi untuk menemukan sesuatu yang baru. Hal ini bisa kita lihat dari gagasannya dalam mengukur tinggi piramida tanpa perlu mengukur secara langsung, tapi dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan dari bayangan suatu tongkat dan konsep kesebangunan yang dikemukakannya.
3. Matematika adalah ilmu yang menarik untuk kita pelajari, bukan ilmu yang menyeramkan seperti dikatakan sebagian orang. Karena telah banyak sejarah yang menceritakan tentang peran matematika dalam memajukan peradaban manusia, salah satunya adalah konsep kesebangunan dari Thales yang berguna dalam kehidupan manusia saat ini.

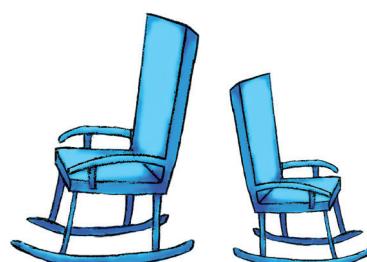
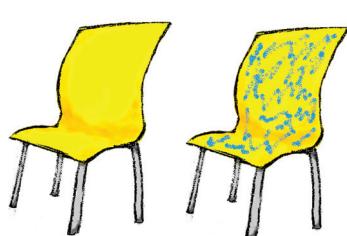
4.1 Kekongruenan Bangun Datar

Pertanyaan Penting

Bagaimana kamu dapat mengidentifikasi dua bangun datar dikatakan kongruen?

Supaya kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan diatas silakan amati gambar-gambar di bawah ini dengan seksama.

Kegiatan 1 Mengidentifikasi Dua Benda Kongruen atau Tidak

Ayo Kita Amati

Coba kamu amati gambar di bawah ini dengan seksama.

(a) Dua gambar mobil yang kongruen

(b) Dua gambar mobil yang tidak kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.1 Sepasang mobil kongruen dan tidak kongruen

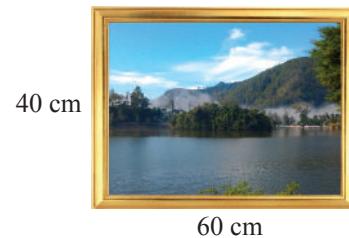
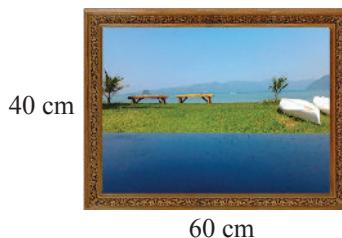
Perhatikan pula pasangan di bawah ini dengan teliti.

(a) Dua gambar kursi yang kongruen

(b) Dua gambar kursi yang tidak kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.2 Sepasang kursi kongruen dan tidak kongruen

(a) Lima gambar pensil yang kongruen (b) Dua gambar pensil tidak kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.3 Pensil-pensil yang kongruen dan tidak kongruen

Coba kamu amati pula Gambar 4.4 dan 4.5 di bawah ini.

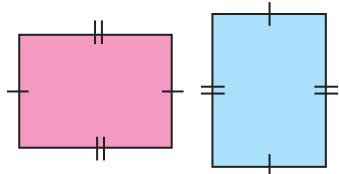
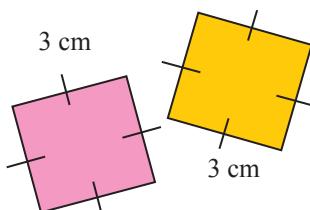
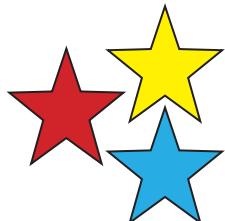
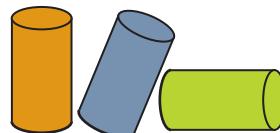
Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.4 Dua pigura lukisan yang kongruen

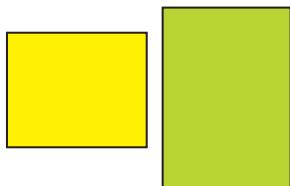
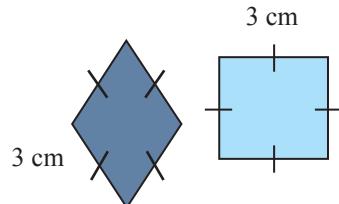
Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.5 Dua pigura lukisan yang tidak kongruen

Gunakan Kalimatmu Sendiri

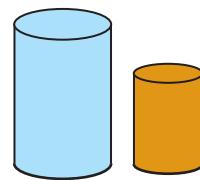
Setelah mengamati Gambar 4.1 sampai dengan Gambar 4.5, menurutmu mengapa dua bangun atau lebih dikatakan kongruen?

Coba carilah contoh lainnya di sekitarmu. Kemudian diskusikan dengan temanmu dan paparkan hasil Kegiatan 1 dari kelompokmu ini kepada teman sekelasmu.

Kegiatan 2 Menemukan Konsep Dua Bangun Kongruen

Perhatikanlah beberapa pasangan bangun berikut ini.

(a) Dua persegi panjang kongruen

(b) Dua persegi kongruen

(c) Tiga bintang kongruen

(d) Tiga tabung kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.6 Pasangan bangun yang kongruen

Gambar di bawah ini adalah contoh pasangan bangun tidak kongruen.

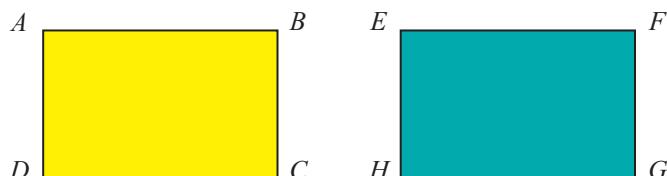
(a) Dua persegi panjang tidak kongruen

(b) Dua segi empat tidak kongruen

(c) Dua bintang tidak kongruen

(d) Dua tabung tidak kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.7 Pasangan bangun yang tidak kongruen

Diskusikan dengan kelompokmu, lalu paparkan hasilnya kepada teman-teman sekelasmu.

1. Mengapa bangun-bangun pada Gambar 4.6 kongruen, tetapi bangun-bangun pada Gambar 4.7 tidak kongruen?
2. Syarat apakah yang dipenuhi oleh bangun-bangun pada Gambar 4.6 yang tidak dipenuhi oleh bangun-bangun pada Gambar 4.7?

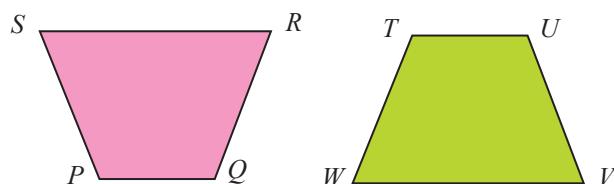
Perhatikanlah bangun di bawah ini.

Gambar 4.8

1. Salinlah persegi panjang *ABCD* pada Gambar 4.8 pada kertas lain kemudian guntinglah.

2. Geser (tranlasikan) persegi panjang *ABCD* yang kamu buat tadi sehingga titik *A* berimpit dengan *E*, dan titik *B* berhimpit dengan titik *F*. Apa yang terjadi dengan titik-titik lain?
3. Apakah persegi panjang *ABCD* tepat menempati (menutupi) persegi panjang *EFGH*?

Jika benar setiap titik pada persegi panjang *ABCD* dapat menempati titik-titik persegi panjang *EFGH*, maka dikatakan bahwa persegi panjang *ABCD* kongruen dengan persegi panjang *EFGH*.

> Bangun *ABCD* kongruen dengan *EFGH* disimbolkan dengan $ABCD \cong EFGH$.

Kegiatan 4 Mendapatkan Dua Bangun Kongruen dengan Rotasi

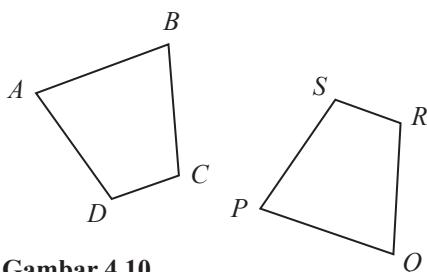
Lakukan kegiatan di bawah ini bersama temanmu.

Perhatikan bangun di bawah ini.

Gambar 4.9

1. Jiplaklah bangun trapesium *PQRS* (lihat Gambar 4.9) pada kertas lain lalu guntinglah.
2. Putarlahlah (rotasikan) trapesium yang kamu buat dan geserlah menuju trapesium *TUVW*.

   Apakah trapesium *PQRS* tepat menempati trapesium *TUVW*?

   Jika benar, maka $PQRS \cong TUVW$.

Berdasarkan Kegiatan 3 dan 4 yang sudah kamu kerjakan bersama temanmu, diskusikan dengan temanmu hubungan transformasi dengan bangun yang kongruen. Silakan paparkan kepada teman sekelasmu.

Kegiatan 5 Syarat Dua Bangun Segi Banyak (Poligon) Kongruen

Perhatikan bangun di bawah ini.

Gambar 4.10

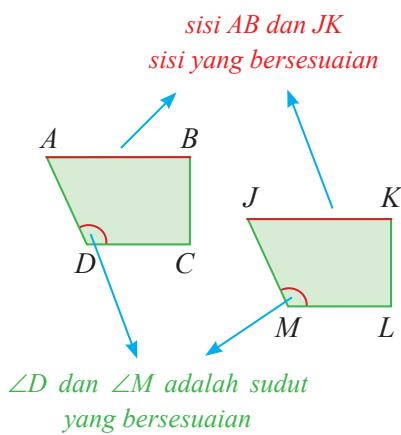
1. Ukurlah panjang sisi dan besar sudut-sudut segi empat *ABCD* dan segi empat *PQRS*. Tuliskan pada Gambar 4.10.
2. Tuliskan sisi-sisi yang bersesuaian. Bagaimana panjang sisi-sisi yang bersesuaian tersebut?
3. Tuliskan sudut-sudut yang bersesuaian. Bagaimana besar sudut-sudut yang bersesuaian tersebut?
4. Apakah kedua bangun itu kongruen? Jelaskan.
5. Menurut kamu, apa saja syarat-syarat dua bangun segi banyak (poligon) kongruen? Jelaskan.
6. Carilah benda-benda di sekitarmu yang permukaannya kongruen. Selidikilah apakah syarat-syarat yang kamu berikan untuk dua bangun kongruen terpenuhi?

Berdasarkan Kegiatan 5, kesimpulan yang kamu peroleh adalah:

Dua bangun segi banyak (poligon) dikatakan kongruen jika memenuhi dua syarat, yaitu:

1. ...
2. ...

Apakah jika sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang sudah menjamin dua bangun kongruen?

Apakah jika sudut-sudut yang bersesuaian sama sudah menjamin dua bangun kongruen?

Materi Esensi 4.1 Syarat Dua Bangun Datar Kongruen

Dua bangun yang mempunyai bentuk dan ukuran yang sama dinamakan kongruen.

Dua bangun segi banyak (poligon) dikatakan kongruen jika memenuhi dua syarat, yaitu:

(i) sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang, dan

(ii) sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

Sudut-sudut yang bersesuaian:

$\angle A$ dan $\angle J$ $\rightarrow m\angle A = m\angle J$

$\angle B$ dan $\angle K$ $\rightarrow m\angle B = m\angle K$

$\angle C$ dan $\angle L$ $\rightarrow m\angle C = m\angle L$

$\angle D$ dan $\angle M$ $\rightarrow m\angle D = m\angle M$

Sisi-sisi yang bersesuaian:

AB dan JK $\rightarrow AB = JK$

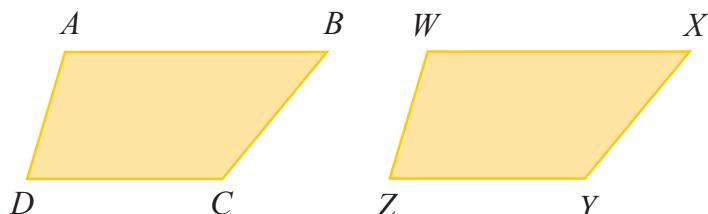
BC dan KL $\rightarrow BC = KL$

CD dan LM $\rightarrow CD = LM$

DA dan MJ $\rightarrow DA = MJ$

Jika bangun $ABCD$ dan $JKLM$ memenuhi kedua syarat tersebut, maka bangun $ABCD$ dan $JKLM$ kongruen, dinotasikan dengan $ABCD \cong$ JKLM.

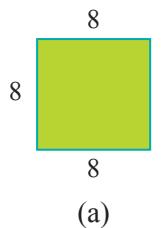
Jika bangun $ABCD$ dan $JKLM$ tidak memenuhi kedua syarat tersebut maka bangun $ABCD$ dan $JKLM$ tidak kongruen, dinotasikan dengan $ABCD \ncong JKLM$.

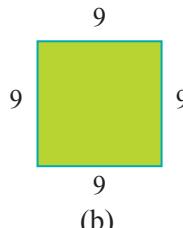
Catatan:

Ketika menyatakan dua bangun kongruen sebaiknya dinyatakan berdasarkan titik-titik sudut yang bersesuaian dan berurutan, contohnya:

atau

atau

Contoh 1 — Menentukan Sisi-sisi dan Sudut-sudut yang Bersesuaian

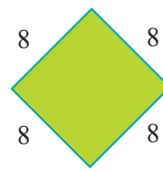
Segi empat *ABCD* dan *WXYZ* pada gambar di bawah kongruen. Sebutkan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian

Alternatif Penyelesaian:

Sisi-sisi yang bersesuaian:

$\overline{AB}$ dan $\overline{WX}$

$\overline{BC}$ dan $\overline{XY}$

$\overline{CD}$ dan $\overline{YZ}$

$\overline{DA}$ dan $\overline{ZW}$

Sudut-sudut yang bersesuaian:

$\angle A$ dan $\angle W$

$\angle B$ dan $\angle X$

$\angle C$ dan $\angle Y$

$\angle D$ dan $\angle Z$

Contoh 2 — Mengidentifikasi Dua Bangun Kongruen

(a)

(b)

(c)

Manakah persegi di atas yang kongruen? Jelaskan.

Alternatif Penyelesaian:

Dua bangun dikatakan kongruen jika memenuhi dua syarat, yaitu:

(i) *sudut-sudut yang bersesuaian sama besar*

Setiap persegi mempunyai empat sudut siku-siku, sehingga sudut-sudut yang bersesuaian pada persegi (a), (b) dan (c) besarnya pasti sama.

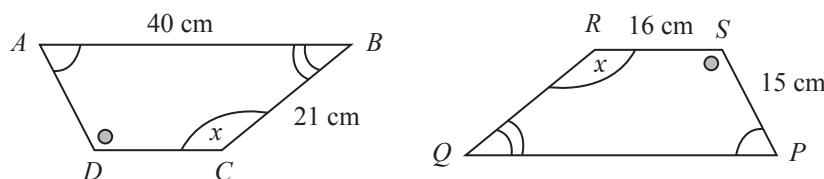
(ii) *sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang*

Persegi (a) dan persegi (b)

Panjang setiap sisi persegi (a) adalah 8 cm. Panjang setiap sisi persegi (b) adalah 9 cm. Jadi, sisi-sisi yang bersesuaian persegi (a) dan (b) tidak sama panjang.

Persegi (b) dan persegi (c)

Panjang setiap sisi persegi (b) adalah 9 cm. Panjang setiap sisi persegi (c) adalah 8 cm. Jadi, sisi-sisi yang bersesuaian persegi (b) dan (c) tidak sama panjang.

Persegi (a) dan persegi (c)

Panjang setiap sisi persegi (a) adalah 8 cm. Panjang setiap sisi persegi (c) adalah 8 cm. Jadi, sisi-sisi yang bersesuaian persegi (a) dan (c) sama panjang.

Berdasarkan (i) dan (ii) di atas, maka persegi yang kongruen adalah persegi (a) dan (c).

Contoh 3 **Menentukan Panjang Sisi dan Besar Sudut yang Belum Diketahui**

Perhatikan gambar trapesium *ABCD* dan *PQRS* yang kongruen di bawah ini.

a. Jika panjang sisi $AB = 40$ cm, $BC = 21$ cm, $RS = 16$ cm, dan $PS = 15$ cm, tentukan panjang sisi *AD*, *DC*, *PQ*, dan *QR*.

b. Jika besar $\angle A = 60^o$, $\angle B = 40^o$. Berapakah besar $\angle R$ dan $\angle S$?
(selanjutnya, besar $\angle A$ ditulis dengan $m\angle A$, seperti yang sudah kamu kenal di kelas 7 dan 8)

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui: bangun $ABCD \cong PQRS$, berarti

- sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang
- sudut-sudut yang bersesuaian sama besar

a. Untuk menentukan panjang sisi *AD*, *DC*, *PQ*, dan *QR*, tentukan terlebih dulu sisi-sisi yang bersesuaian yaitu:

AB dengan $PQ \rightarrow AB = PQ$
BC dengan $QR \rightarrow BC = QR$
DC dengan $SR \rightarrow DC = SR$
AD dengan $PS \rightarrow AD = PS$

} menentukan sisi-sisi yang bersesuaian

(mengapa bukan $AB = SR$? Jelaskan)

Dengan demikian, jika $AB = 40$ cm, $BC = 21$ cm, $RS = 16$ cm, dan $PS = 15$ cm maka:

$AD = PS = 15$ cm

$DC = SR = 16$ cm

$QR = BC = 21$ cm

$PQ = AB = 40$ cm

b. Untuk menentukan $m\angle R$ dan $m\angle S$, tentukan terlebih dulu sudut-sudut yang bersesuaian yaitu:

$\angle A = \angle P \rightarrow m\angle A = m\angle P$
$\angle B = \angle Q \rightarrow m\angle B = m\angle Q$
$\angle C = \angle R \rightarrow m\angle C = m\angle R$
$\angle D = \angle S \rightarrow m\angle D = m\angle S$

} menentukan sudut-sudut yang bersesuaian

Dengan demikian, jika $m\angle A = 60^o$, $m\angle B = 40^o$ maka:

$m\angle P = m\angle A = 60^o$ dan (*Mengapa bukan $m\angle P = m\angle B$? Jelaskan*)

$m\angle Q = m\angle B = 40^o$ (*Mengapa bukan $m\angle Q = m\angle A$? Jelaskan*)

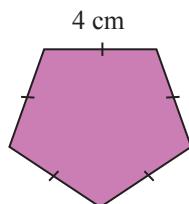
$m\angle R + m\angle Q = 180^o$ (*Mengapa? Ingat pelajaran kelas VII*)

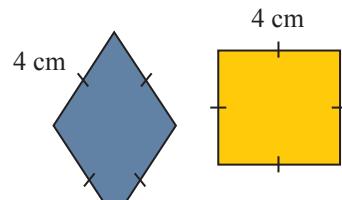
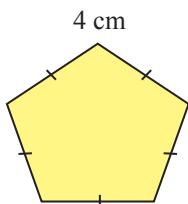
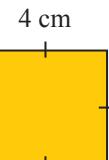
$m\angle R = 180^o - m\angle Q$

$m\angle R = 180^o - 40^o$

$m\angle R = 140^o$

$m\angle S = 180^o - m\angle P$ (*Mengapa? Ingat pelajaran kelas VII*)

$m\angle S = 180^o - 60^o$

$m\angle S = 120^o$

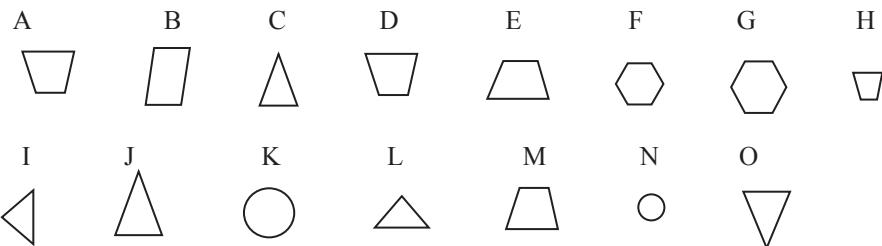
Jadi $m\angle R = 140^o$ dan $m\angle S = 120^o$.

Manakah pasangan bangun berikut ini yang kongruen dan tidak kongruen? Jelaskan.

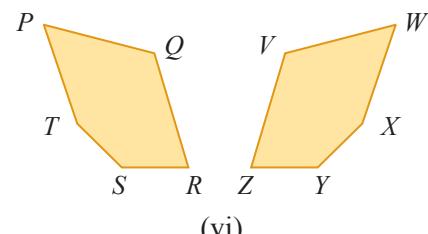
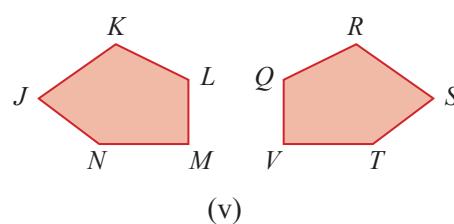
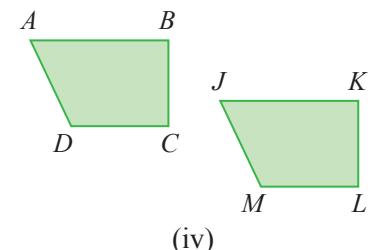
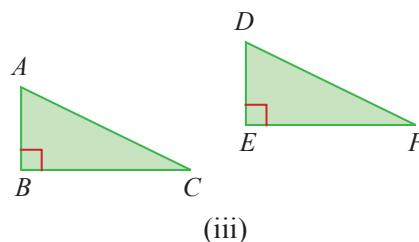
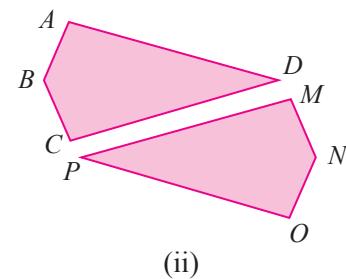
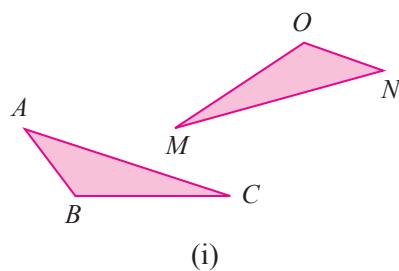
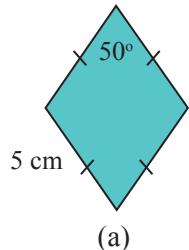
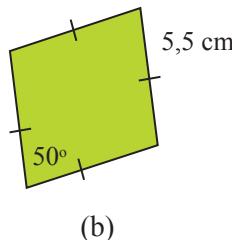
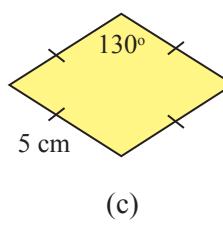
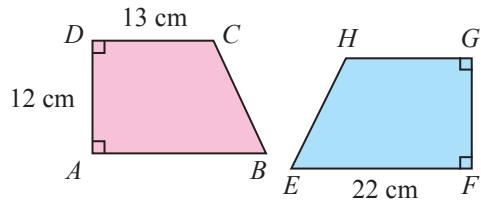
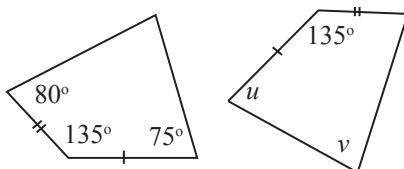
Latihan 4.1 Kekongruenan Bangun Datar

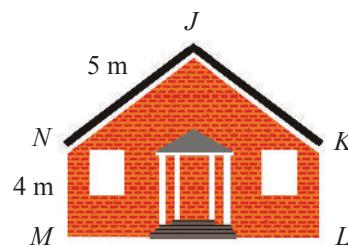
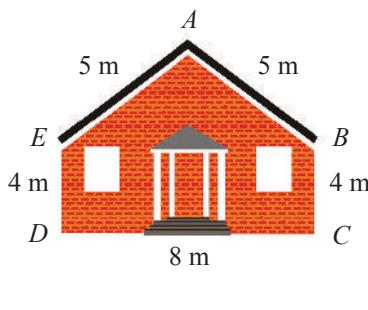
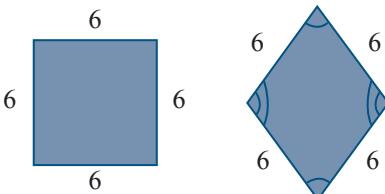
1. Manakah di antara gambar di bawah ini yang kongruen?

2. Manakah di antara gambar di bawah ini yang kongruen?

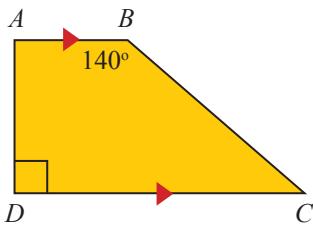
(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)

Sumber: www.edapoenya.files.wordpress.com

3. Apakah menurutmu pensil warna pada gambar di samping ini kongruen? Jelaskan.

Sumber: www.kameradroid.com

4. Tuliskan pasangan bangun yang kongruen.

Tuliskan langkahmu menentukan bangun tersebut, digeser (translasi), diputar (rotasi), atau gabungannya?

5. Berikut ini adalah pasangan bangun yang kongruen. Tuliskan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian.

6. Manakah belah ketupat di bawah ini yang kongruen? Jelaskan.

7. Diketahui trapesium $ABCD$ dan trapesium $FEHG$ adalah kongruen.

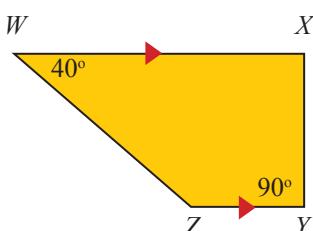
   Jika panjang sisi AD = 12 cm, DC = 13 cm dan EF = 22 cm maka tentukan panjang EH.

8. Perhatikan gambar berikut ini.

Jika dua gambar di samping kongruen, tentukan nilai u dan v pada gambar tersebut.

9. Perhatikan dua gambar rumah tampak dari depan yang kongruen berikut ini.

   a. Tentukan sisi-sisi yang bersesuaian.
   b. Tentukan sudut-sudut yang bersesuaian.
   c. Berapa panjang KJ, KL, dan LM?
   d. Berapa keliling dan luas $JKLMN$ jika jarak J ke LM adalah 7 m?

10. **Analisis Kesalahan**

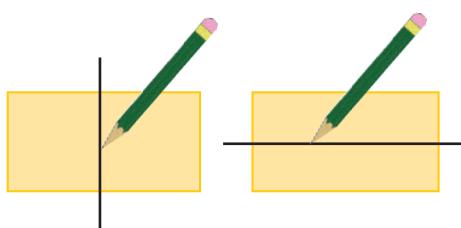
Jelaskan dan perbaikilah pernyataan yang salah berikut.

"Kedua bangun di samping mempunyai empat sisi dan sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang, jadi kedua bangun tersebut kongruen"

11. **Benar atau Salah**

Trapesium pada gambar di samping ini kongruen.

Tentukan pernyataan berikut ini benar atau salah. Jelaskan.

Besar $\angle Z = 140^{\circ}$

Besar $\angle C = 40^{\circ}$

Sisi *WZ* bersesuaian dengan sisi *CB*

Keliling bangun *ABCD* sama dengan keliling *WXYZ*.

Luas bangun *ABCD* tidak sama dengan luas *WXYZ*.

12. **Bernalar**

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar di samping menunjukkan dua cara menggambar satu garis untuk membagi persegi panjang menjadi dua bangun yang kongruen. Gambarkan tiga cara lainnya.

13. **Berpikir Kritis**

Apakah luas dua bangun yang kongruen pasti sama?

Apakah dua bangun dengan luas yang sama pasti kongruen?

Jelaskan dengan gambar atau diagram untuk mendukung jawabanmu.

14. **Berpikir Kritis**

Berapa banyak segitiga sama sisi kongruen paling sedikit yang diperlukan untuk membentuk segitiga samasisi yang ukurannya lebih besar dari segitiga sama sisi semula? Demikian juga, berapa persegi kongruen paling sedikit yang diperlukan untuk menghasilkan persegi yang ukurannya lebih besar dari persegi semula? Dapatkah hasil ini diperluas untuk segi-n beraturan yang lain? Jelaskan alasanmu. Harus ditambah berapa banyak segi-n beraturan lagi supaya tetap jadi segi-n?

4.2 Kekongruenan Dua Segitiga

Pertanyaan Penting

Berdasarkan Subbab 4.1, dua bangun dikatakan kongruen jika panjang sisi-sisi yang bersesuaian adalah sama dan besar sudut-sudut yang bersesuaian adalah sama. Sehingga, dua segitiga dikatakan kongruen jika ketiga pasang sisi yang bersesuaian sama panjang dan ketiga pasang sudut yang bersesuaian sama besar.

Apakah perlu diuji keenam pasang unsur tersebut untuk menentukan dua segitiga kongruen atau tidak? Atau ada alternatif lain untuk menguji kekongruenan dua segitiga?

Untuk mengetahui jawabannya coba lakukan kegiatan-kegiatan berikut ini dengan teman sekelompokmu.

Kegiatan 1 — Menguji Kekongruenan Segitiga dengan Kriteria Sisi – Sisi – Sisi

Sediakan alat dan bahan sebagai berikut:

- Selembar kertas (kertas berpetak akan lebih memudahkan)
- Pensil
- Batang lidi
- Penggaris
- Gunting
- Busur derajat

Lakukan kegiatan berikut ini.

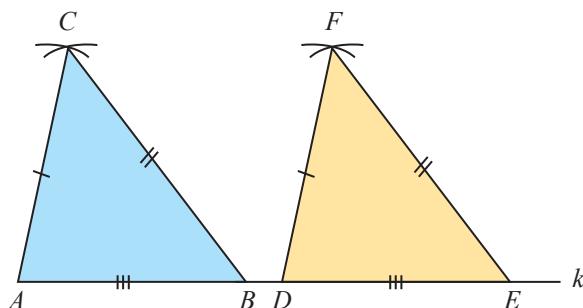
1. Potonglah batang lidi menjadi 3 potong dengan ukuran-ukuran yang bisa dibentuk menjadi segitiga (ingat kembali tentang syarat panjang sisi segitiga di kelas VII).

Misalnya: 5 cm, 6 cm, dan 7 cm. Kemudian bentuklah ketiga potongan lidi tersebut menjadi segitiga.

2. Salinlah segitiga yang terbentuk tersebut pada selembar kertas.
3. Ukurlah besar tiap-tiap sudut pada segitiga itu dengan busur.
4. Lakukan lagi langkah 1 sampai 3 oleh anggota lain di kelompokmu (dengan ukuran potongan lidi yang sama dengan di langkah 1).
5. Bandingkan dengan segitiga yang dihasilkan temanmu. Apakah kamu mendapatkan pasangan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar?
6. Atau gunting salah satu dari gambar segitiga tersebut kemudian tempelkan pada segitiga satunya, apakah kedua segitiga itu tepat saling menutupi?
7. Menurutmu, apakah kedua segitiga tersebut kongruen? Jelaskan.

   Tuliskan kesimpulanmu.

Alternatif kegiatan pada Kegiatan 1 ini dapat juga kamu lakukan kegiatan di bawah ini:

Sediakan alat dan bahan sebagai berikut:

- Selembar kertas
- Pensil
- Penggaris
- Busur derajat
- Jangka dan gunting

Lakukan kegiatan berikut ini.

1. Gambarlah ΔABC dan ΔDEF dengan panjang sisi $AB = DE$, $BC = EF$, dan $AC = DF$ pada selembar kertas dengan langkah sebagai berikut. (lihat gambar)
   a) Gambarlah garis k sebarang pada selembar kertas.
   b) Pada garis k, buatlah segmen garis AB dan DE, dengan $AB = DE$.
   c) Dengan menggunakan jangka, lukislah dua busur lingkaran masing-masing berpusat di A dan D, dengan jari-jari sama.
   d) Dengan menggunakan jangka, lukislah dua busur lingkaran masing-masing berpusat di B dan E, dengan jari-jari sama. (jari-jari tidak harus sama dengan jari-jari pada langkah c)

e) Beri label titik C dan F pada perpotongan kedua busur lingkaran di atas. Hubungkan titik C dengan A dan B maka terbentuklah ΔABC. Hubungkan titik F dengan D dan E maka terbentuklah ΔDEF.

Apakah kamu memperoleh panjang $AB = DE$, $BC = EF$, dan $AC = DF$?

2. Guntinglah ΔDEF dan tumpukkan di atas ΔABC, apakah kedua segitiga tersebut kongruen? Jelaskan.
3. Untuk memastikan jawaban kamu pada no. 2, ukurlah sudut-sudut yang bersesuaian. Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar? Berikan penjelasan.

Dari kegiatan di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Dua segitiga kongruen jika dan hanya jika ...

Kegiatan 2 — **Menguji Kekongruenan Segitiga dengan Kriteria Sisi – Sudut – Sisi**

Sediakan alat sebagai berikut.

- Selembar kertas
- Pensil
- Penggaris
- Gunting
- Busur

Lakukan kegiatan berikut ini.

1. Gambarlah ΔABC dan ΔDEF dengan panjang sisi $AB = DE$, $m\angle A = m\angle D$, dan $AC = DF$ pada selembar kertas dengan langkah sebagai berikut: (lihat gambar)

a) Gambarlah garis k sebarang pada selembar kertas.

b) Pada garis k, buatlah segmen garis AB dan DE, dengan $AB = DE$.

c) Buatlah garis p melalui titik A dan buatlah garis n melalui titik D, sedemikian hingga garis p sejajar dengan q. Apakah $m\angle A = m\angle D$? Jelaskan.

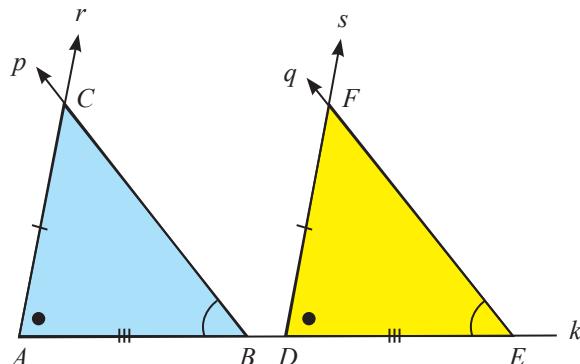
d) Buatlah segmen garis AC pada garis p, dan segmen garis DF pada garis q, sedemikian hingga panjang $AC = DF$.

e) Hubungkan titik B dengan titik C dan juga hubungkan titik E dengan titik F sehingga terbentuk ΔABC dan ΔDEF dengan panjang $AB = DE$, $m\angle A = m\angle D$, dan $AC = DF$.

2. Guntinglah ΔDEF dan tumpukkan di atas ΔABC, apakah kedua segitiga tersebut kongruen? Jelaskan.

3. Untuk memastikan jawaban kamu pada no. 2, ukurlah besar sudut-sudut dan panjang sisi yang lainnya. Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar? Apakah sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang? Berikan penjelasan.

Dari kegiatan di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Dua segitiga kongruen jika dan hanya jika ...

Kegiatan 3 — Menguji Kekongruenan Segitiga dengan Kriteria Sudut – Sisi – Sudut

Sediakan alat sebagai berikut.

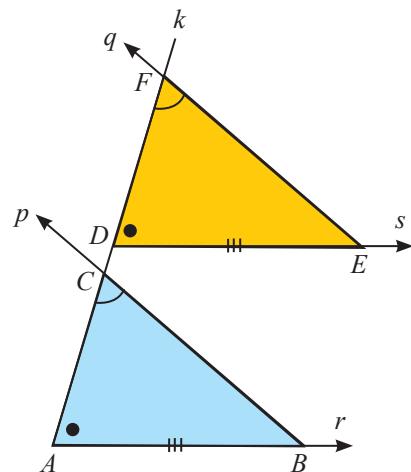
- Selembar kertas
- Gunting
- Pensil
- Busur
- Penggaris

Lakukan kegiatan berikut ini.

1. Gambarlah ΔABC dan ΔDEF dengan $m\angle A = m\angle D$, $AB = DE$, dan $m\angle B = m\angle E$ pada selembar kertas dengan langkah sebagai berikut: (lihat gambar)
   a) Gambarlah garis k sebarang pada selembar kertas.
   b) Pada garis k, buatlah segmen garis AB dan DE, dengan $AB = DE$.
   c) Buatlah garis r melalui titik A dan buatlah garis s melalui titik D, sedemikian hingga garis r sejajar dengan s. Apakah $m\angle A = m\angle D$? Jelaskan.
   d) Buatlah garis p melalui titik B dan buatlah garis q melalui titik E, sedemikian hingga garis p sejajar dengan q. Apakah $m\angle B = m\angle$E? Jelaskan.
   e) Titik perpotongan garis r dan p beri nama titik C, perpotongan garis s dan q beri nama titik F, sehingga terbentuk ΔABC dan ΔDEF dengan $m\angle A = m\angle D$, $AB = DE$, dan $m\angle B = m\angle E$.

2. Guntinglah ΔDEF dan tumpukkan di atas ΔABC, apakah kedua segitiga tersebut kongruen? Jelaskan.
3. Untuk memastikan jawaban kamu pada no. 2, ukurlah besar sudut-sudut dan panjang sisi yang lainnya. Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar? Apakah sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang? Berikan penjelasan.

Dari kegiatan di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Dua segitiga kongruen jika dan hanya jika ...

Kegiatan 4 **Menguji Kekongruenan Segitiga dengan Kriteria Sisi – Sudut – Sudut**

Sediakan alat sebagai berikut:

- Selembar kertas
- Penggaris
- Gunting
- Busur

Lakukan kegiatan berikut ini.

1. Gambarlah ΔABC dan ΔDEF dengan $m\angle A = m\angle D$, $m\angle C = m\angle F$, dan $AB = DE$ pada selembar kertas dengan langkah sebagai berikut: (lihat gambar)

   a) Gambarlah garis k sebarang pada selembar kertas.

   b) Buatlah garis r yang memotong garis k di titik A.

   c) Buatlah garis s yang memotong garis k di titik D dan sejajar dengan garis r.

   d) Pada garis r, buatlah segmen garis AB.
   Pada garis s, buatlah segmen garis DE dengan $DE = AB$.

   e) Dari titik B buatlah garis p yang memotong garis k. Perpotongan antara garis p dan garis k beri nama titik C.

   f) Dari titik E buatlah garis q yang memotong garis k di titik F dan sejajar dengan garis p. Perpotongan antara garis q dan garis k beri nama titik F.

   g) Apakah pasti $m\angle A = m\angle D$ dan $m\angle C = m\angle F$? Jelaskan.

h) Terbentuk ΔABC dan ΔDEF dengan $AB = DE$, $m\angle A = m\angle D$, dan $m\angle C = m\angle F$. (kriteria sisi – sudut – sudut)

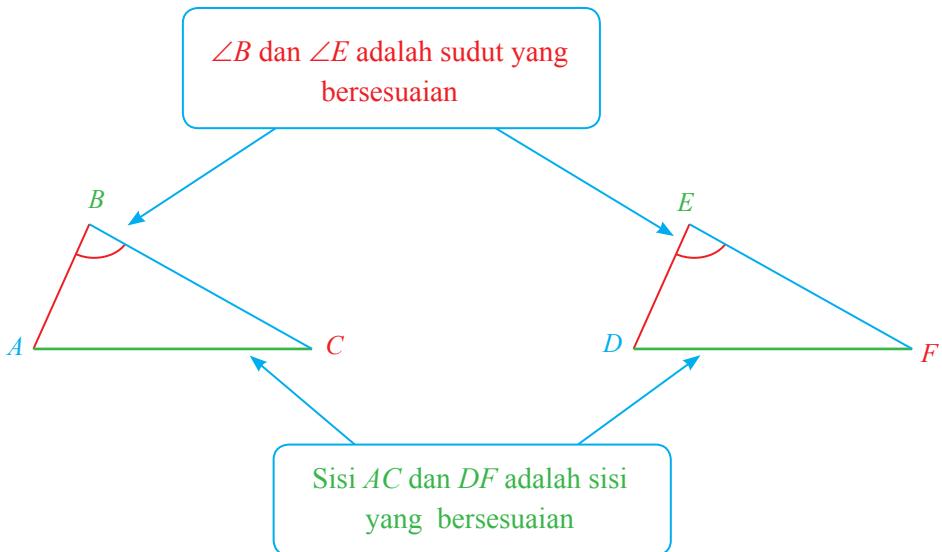
2. Guntinglah ΔDEF dan tumpukkan di atas ΔABC, apakah kedua segitiga tersebut kongruen? Jelaskan.

3. Untuk memastikan jawaban kamu pada no. 2, ukurlah besar sudut-sudut dan panjang sisi yang lainnya. Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar? Apakah sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang? Berikan penjelasan.

Dari kegiatan di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

> Dua segitiga disebut kongruen jika memenuhi beberapa syarat, yaitu ....

Apakah dua segitiga yang mempunyai tiga pasang sudut-sudut yang bersesuaian sama besar pasti kongruen? Jelaskan dengan alasan yang mendukung jawabanmu.

Kegiatan 1 sampai dengan Kegiatan 4 di Subbab 4.2 ini, kamu sudah menemukan syarat-syarat (kriteria) dua segitiga kongruen. Coba carilah kriteria lain untuk menguji dua segitiga kongruen.

Materi Esensi 4.2 Syarat Dua Segitiga Kongruen

Dua bangun yang mempunyai bentuk dan ukuran yang sama dinamakan kongruen. Dua segitiga dikatakan kongruen jika hanya jika memenuhi syarat berikut ini:

(i) sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang

(ii) sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

Sisi-sisi yang bersesuaian:

AB dan $DE \rightarrow AB = DE$

BC dan $EF \rightarrow BC = EF$

CA dan $FD \rightarrow CA = FD$

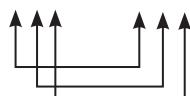
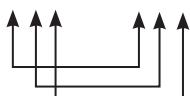
atau dengan kata lain

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = 1$$

Sudut-sudut yang bersesuaian:

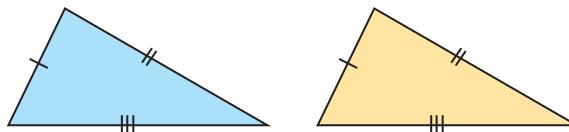
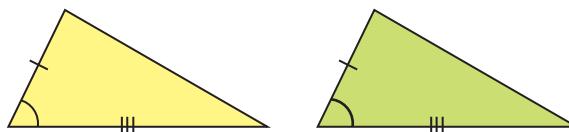
$\angle A$ dan $\angle D \rightarrow m\angle A = m\angle D$

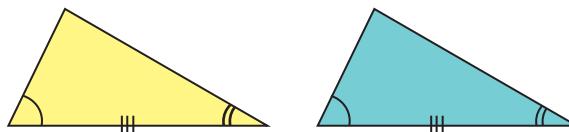
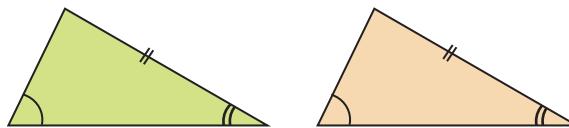
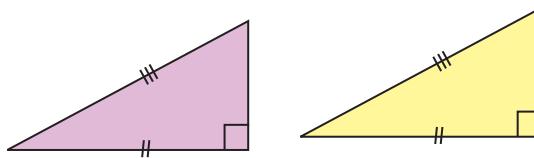
$\angle B$ dan $\angle E \rightarrow m\angle B = m\angle E$

$\angle C$ dan $\angle F \rightarrow m\angle C = m\angle F$

Jika ΔABC dan ΔDEF memenuhi syarat tersebut, maka ΔABC dan ΔDEF kongruen, dinotasikan dengan $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

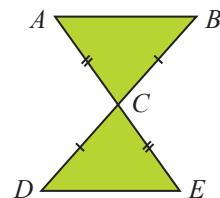
Jika ΔABC dan ΔDEF tidak memenuhi syarat tersebut maka maka ΔABC dan ΔDEF tidak kongruen, dinotasikan dengan $\Delta ABC \ncong \Delta DEF$.

Catatan:

Ketika menyatakan dua segitiga kongruen sebaiknya berdasarkan titik-titik sudut yang bersesuaian dan berurutan, contohnya:

bukan $\Delta ABC \cong \Delta EDF$ atau $\Delta ABC \cong \Delta EFD$ atau yang lainnya.

Untuk menguji apakah dua segitiga kongruen atau tidak , tidak perlu menguji semua pasangan sisi dan sudut yang bersesuaian. Dua segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu kondisi berikut ini:

1. Ketiga pasangan sisi yang bersesuaian sama panjang. Biasa disebut dengan kriteria *sisi – sisi – sisi*.

2. Dua pasang sisi yang bersesuaian sama panjang dan sudut yang diapitnya sama besar. Biasa disebut dengan kriteria *sisi – sudut – sisi*.

3. Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sisi yang menghubungkan kedua sudut tersebut sama panjang. Biasa disebut dengan kriteria *sudut – sisi – sudut*.

4. Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sepasang sisi yang bersesuaian sama panjang. Biasa disebut dengan kriteria *sudut – sudut – sisi*.

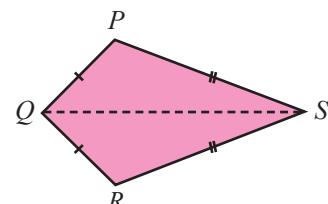
5. Khusus untuk segitiga siku-siku, sisi miring dan satu sisi siku yang bersesuaian sama panjang.

Contoh 1 **Membuktikan Dua Segitiga Kongruen**

a. Perhatikan gambar di samping.

Buktikan bahwa $\Delta ABC \cong \Delta EDC$.

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan gambar di atas diperoleh bahwa:

$AC = EC$	(diketahui ada tanda sama panjang)
$m\angle ACB = m\angle ECD$	(karena saling bertolak belakang)
$BC = DC$	(diketahui ada tanda sama panjang)
Jadi, $\Delta ABC \cong \Delta EDC$	(berdasarkan kriteria sisi – sudut – sisi).

b. Perhatikan gambar di samping.

Buktikan bahwa $\Delta PQS \cong \Delta RQS$.

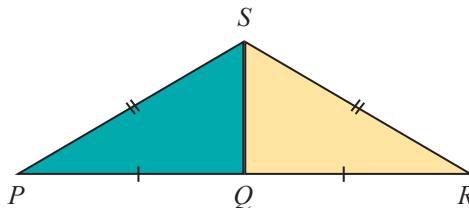
Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan gambar di samping diperoleh bahwa:

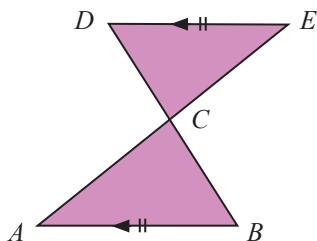
$PQ = RQ$ (diketahui ada tanda sama panjang)

$PS = RS$ (diketahui ada tanda sama panjang)

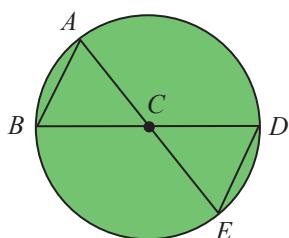
QS pada ΔPQS sama dengan QS pada ΔRQS (QS berimpit)

Jadi, $\Delta PQS \cong \Delta RQS$ (berdasarkan kriteria sisi – sisi – sisi).

Jelaskan dengan alasan yang mendukung jawabanmu.

1. Apakah dua segitiga yang mempunyai tiga pasang sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang pasti kongruen?
2. Apakah dua segitiga yang mempunyai tiga pasang sudut-sudut yang bersesuaian sama besar pasti kongruen?
3. Apakah dua segitiga yang mempunyai dua pasang sisi yang bersesuaian sama panjang dan sepasang sudut yang bersesuaian sama besar pasti kongruen?
4. Apakah dua segitiga yang mempunyai dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sepasang sisi yang bersesuaian sama panjang pasti kongruen?

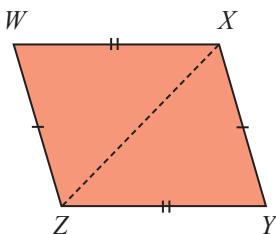
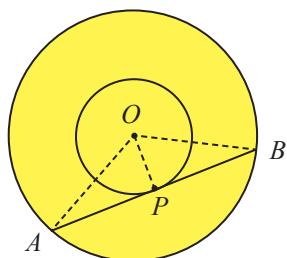
Latihan 4.2 Kekongruenan Dua Segitiga

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar dan sistematis.

1. Perhatikan gambar di bawah ini.

Tunjukkan bahwa ΔPQS dan ΔRQS kongruen.

2. Perhatikan gambar di bawah ini.

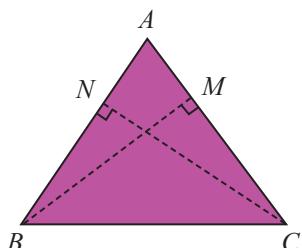
Panjang $AB = DE$ dan $AB // DE$.

Tunjukkan bahwa ΔABC dan ΔEDC kongruen.

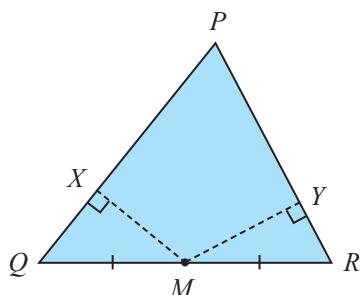
3.

Titik C adalah titik pusat lingkaran. Tunjukkan bahwa dua segitiga pada gambar di samping adalah kongruen.

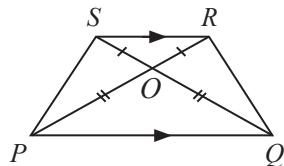
4. Bangun $WXYZ$ adalah segi empat dengan sisi-sisi yang berhadapan panjangnya sama. XZ adalah salah satu diagonalnya.

   a. Tunjukkan bahwa $\Delta WXZ \cong \Delta ZYX$.

   b. Tunjukkan bahwa $WXYZ$ adalah jajargenjang.

5. Perhatikan gambar di bawah ini.

Titik O adalah pusat lingkaran dalam dan lingkaran luar. AB adalah garis singgung dan titik P adalah titik singgung pada lingkaran kecil.

Dengan menggunakan kekongruenan segitiga, tunjukkan bahwa titik P adalah titik tengah AB.

6. Perhatikan gambar di bawah ini.

Pada segitiga ABC, BM tegak lurus dengan AC, CN tegak lurus dengan AB. Panjang $BM = CN$.

Tunjukkan bahwa $\Delta BCM \cong \Delta CBN$

7. Perhatikan gambar di bawah ini.

Titik M adalah titik tengah QR. Garis XM dan YM masing-masing tegak lurus pada PQ dan PR. Panjang $XM = YM$. Buktikan bahwa $\Delta QMX \cong \Delta RMY$.

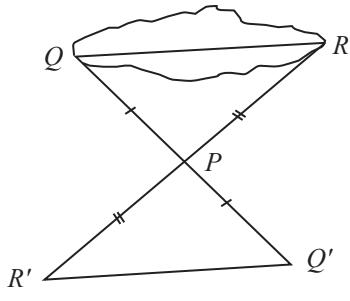
8. **Menalar**

Diketahui $SR//PQ$, $OP = OQ$, $OS = OR$.

Ada berapa pasang segitiga yang kongruen? Sebutkan dan buktikan.

9. **Berpikir Kritis**

Apakah dua segitiga yang mempunyai tiga pasang sudut-sudut yang bersesuaian sama besar pasti kongruen? Jelaskan dengan alasan yang mendukung jawabanmu.

10. **Berpikir Kritis**

    Apakah dua segitiga yang mempunyai dua pasang sisi yang bersesuaian sama panjang dan sepasang sudut yang bersesuaian sama besar pasti kongruen? Jelaskan dengan alasan yang mendukung jawabanmu.

11. **Membagi Sudut**

    Gambarlah sebuah sudut dan beri nama $\angle ABC$, kemudian lakukan langkah berikut.

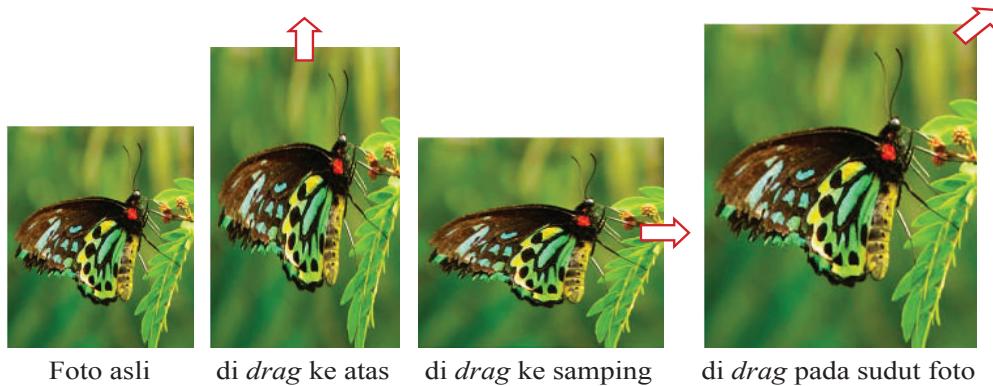
    a. Dengan menggunakan jangka, bagilah $\angle ABC$ tersebut menjadi dua sama besar.

    b. Gambarlah lagi $\angle ABC$ yang sama, kemudian tanpa menggunakan jangka maupun busur derajat, bagilah $\angle ABC$ tersebut menjadi dua sama besar. (petunjuk: gunakan konsep segitiga kongruen)

12. **Mengukur Panjang Danau**

Chan ingin mengukur panjang sebuah danau tetapi tidak memungkinkan mengukurnya secara langsung. Dia merencanakan suatu cara yaitu ia memilih titik P, Q, R dan mengukur jarak QP dan RP (lihat ilustrasi gambar). Kemudian memperpanjang QP menuju ke Q'dan RP menuju ke R' sehingga panjang $QP = PQ'$ dan $RP = PR'$.

Chan menyimpulkan bahwa dengan mengukur panjang $Q'R'$ dia mendapatkan panjang danau tersebut. Apakah menurutmu strategi Chan benar? Jelaskan.

4.3 Kesebangungan Bangun Datar

Bagaimana kamu dapat mengidentifikasi kesebangunan dua bangun atau lebih?

Bagaimana kamu dapat menggunakan perbandingan (*proportion*) untuk membantumu dalam desain grafis, fotografi, atau membuat *layout* majalah?

Ketika kamu mengedit foto dalam komputer, kamu meng-klik dan menggeser (*drag*) foto pada sisi foto (ke atas, ke bawah, atau ke samping) maka ukurannya

terhadap foto asli menjadi tidak proporsional. Tetapi jika kamu menge-klik dan menggeser (*drag*) foto pada sisi sudut foto maka ukuran foto proporsional terhadap foto aslinya.

Foto asli

di *drag* ke atas

di *drag* ke samping

di *drag* pada sudut foto

Sumber: www.static.inilah.com

Gambar 4.11

Kegiatan 1 Kesebangunan Bangun Datar

Alat dan bahan yang diperlukan:

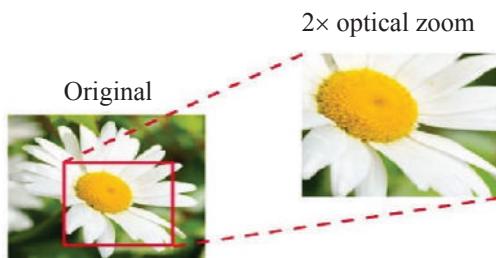
- Pas foto ukuran 2 × 3, 3 × 4, dan 4 × 6
- Penggaris
- Busur derajat
- Pensil

Lakukan kegiatan di bawah bersama temanmu.

1. Siapkan pas fotomu ukuran 2 × 3, 3 × 4, dan 4 × 6 masing-masing 1 lembar.

(i)

(ii)

(iii)

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.12

2. Ukurlah kembali foto-foto itu dengan penggaris untuk memastikan bahwa ukurannya sesuai.
3. Selidikilah manakah menurut kalian di antara foto-foto tersebut yang sebangun, manakah yang tidak sebangun.
4. Menurutmu, bagaimana cara menentukan dua bangun sebangun atau tidak?

Kegiatan 2 Masalah Nyata Sederhana: *Optical Zoom*

Sumber: www.aiptek.com.tw

Sumber: www.amazon.co.uk

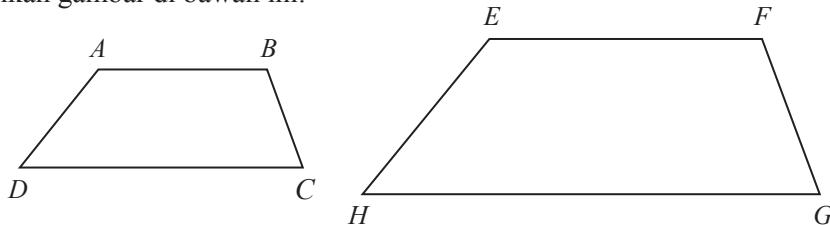
Coba selesaikan masalah berikut ini bersama temanmu.

Optical zoom atau perbesaran optik sering dijumpai pada kamera. Fasilitas *optical zoom* pada kamera adalah berfungsi untuk memperbesar tampilan gambar. Jika gambar diperbesar dua kali disebut 2× *zoom*. Kata *optical* berarti menggunakan lensa kamera bukan menggunakan sistem digital. Misalkan telepon genggam Ayah memiliki 2× *optical zoom* sedangkan telepon genggam Ibu memiliki 4× *optical zoom*. Gambar bunga krisan di samping ukuran gambar awalnya adalah 1,6 cm × 1,4 cm. Gambar orang main ski di samping ukuran gambar awalnya adalah 1,9 cm × 1,2 cm.

a. Berapakah ukuran gambar bunga krisan dan gambar orang main ski pada kamera telepon genggam ayah?
b. Berapakah ukuran gambar bunga krisan dan gambar orang main ski pada kamera telepon genggam ibu?

Ayo Kita Gali Informasi

Coba carilah informasi melalui buku, majalah, internet dan lain-lain mengenai peralatan atau teknologi yang prinsip kerjanya menggunakan konsep kesebangunan.

Buatlah presentasi mengenai informasi yang telah kamu peroleh di atas, lalu paparkan kepada teman-temanmu di kelas.

Kegiatan 3 Syarat-syarat Dua Bangun Segi Banyak (Poligon) Sebangun

Alat yang diperlukan:

- Pensil
- Penggaris
- Busur derajat

Kerjakanlah kegiatan di bawah ini bersama temanmu.

Perhatikan gambar di bawah ini.

1. Ukurlah panjang sisi dan besar sudut bangun pada gambar di atas.
2. Lengkapilah tabel di bawah ini.

Panjang Sisi (dalam satuan cm)			
AB = ...	BC = ...	CD = ...	AD = ...
EF = ...	FG = ...	GH = ...	EH = ...
Besar Sudut			
$m\angle A$ = ... º.	$m\angle B$ = ... º.	$m\angle C$ = ... º.	$m\angle D$ = ... º.
$m\angle E$ = ... º.	$m\angle F$ = ... º.	$m\angle G$ = ... º.	$m\angle H$ = ... º.

3. Tuliskan pasangan sisi-sisi yang bersesuaian.
   Bagaimana perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian?
4. Tuliskan pasangan sudut-sudut yang bersesuaian.
   Bagaimana besar sudut-sudut yang bersesuaian?

Dari kegiatan di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Dua bangun segi banyak (poligon) sebangun jika memenuhi syarat:

....

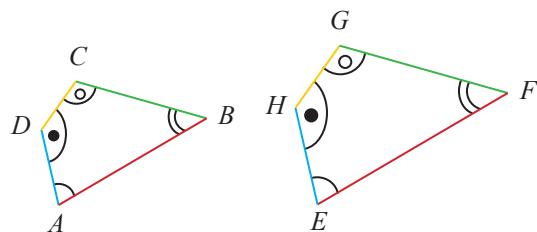
....

Materi Esensi 4.3 Kesebangunan Bangun Datar

Dua bangun datar yang mempunyai bentuk yang sama disebut sebangun. Tidak perlu ukurannya sama, tetapi sisi-sisi yang bersesuaian sebanding (*proportional*) dan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar. Perubahan bangun satu menjadi bangun lain yang sebangun melibatkan perbesaran atau pengecilan.

Dengan kata lain dua bangun dikatakan sebangun jika memenuhi syarat:

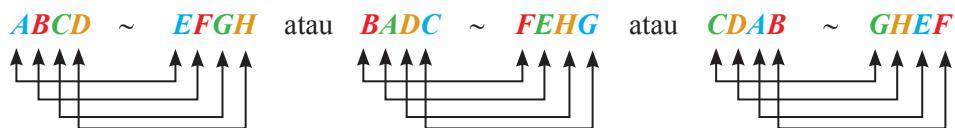
(i) perbandingan panjang sisi yang bersesuaian senilai

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}$$

(ii) sudut yang bersesuaian besarnya sama

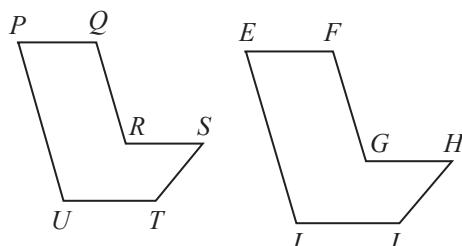
$m\angle A = m\angle E$

$m\angle B = m\angle F$

$m\angle C = m\angle G$

$m\angle D = m\angle H$

Jika bangun *ABCD* dan *EFGH* memenuhi kedua syarat tersebut, maka bangun *ABCD* dan *EFGH* sebangun, dinotasikan dengan $ABCD \sim EFGH$.

Jika bangun *ABCD* dan *EFGH* tidak memenuhi kedua syarat tersebut maka bangun *ABCD* dan *EFGH* tidak sebangun, dinotasikan dengan $ABCD \nsim$ EFGH.

Catatan:

Ketika menyatakan dua bangun sebangun sebaiknya dinyatakan berdasarkan titik-titik sudut yang bersesuaian dan berurutan, contohnya:

Contoh 1 **Menentukan Sisi-sisi dan Sudut-sudut yang Bersesuaian**

Perhatikan gambar dua bangun yang sebangun di bawah ini.

Tentukan:

a. Sisi-sisi yang bersesuaian

b. Sudut-sudut yang bersesuaian

Alternatif Penyelesaian:

Sisi-sisi yang bersesuaian:

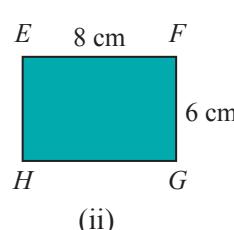
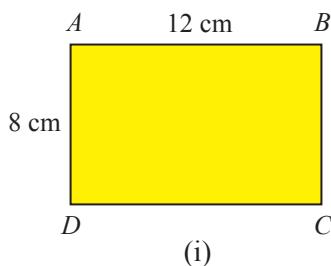
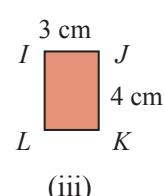
$PQ \rightarrow EF$ $ST \rightarrow HI$

$QR \rightarrow FG$ $TU \rightarrow IJ$

$RS \rightarrow GH$ $UP \rightarrow JE$

Sudut-sudut yang bersesuaian:

$\angle P \rightarrow \angle E$ $\angle S \rightarrow \angle H$

$\angle Q \rightarrow \angle F$ $\angle T \rightarrow \angle I$

$\angle R \rightarrow \angle G$ $\angle U \rightarrow \angle J$

Contoh 2 **Mengidentifikasi Dua Bangun Sebangun**

Perhatikan gambar di bawah ini.

Manakah pasangan persegi panjang yang sebangun? Jelaskan.

(i)

(ii)

(iii)

Alternatif Penyelesaian:

Periksa sudut-sudut yang bersesuaian:

Ketiga gambar tersebut adalah persegi panjang, maka besar setiap sudutnya adalah 90^o. Sehingga, sudut-sudut yang bersesuaian pasti sama besar yaitu 90^o.

Periksa perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian:

- Persegi panjang (i) dan (ii)

$$\frac{AB}{EF} = \frac{DC}{HG} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AD}{EH} = \frac{BC}{FG} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Diperoleh bahwa perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian tidak sama.

Jadi, persegi panjang (i) dan (ii) tidak sebangun.

- Persegi panjang (i) dan (iii)

$$\frac{AB}{JK} = \frac{DC}{IL} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{AD}{JI} = \frac{BC}{KL} = \frac{8}{3}$$

Tampak bahwa perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian tidak sama.

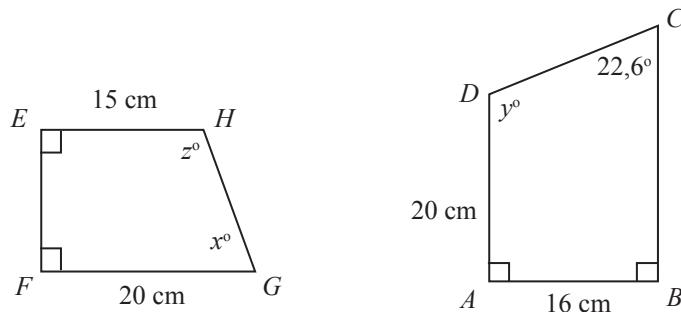
Jadi, persegi panjang (i) dan (iii) tidak sebangun.

- Persegi panjang (ii) dan (iii)

$$\frac{EF}{JK} = \frac{HG}{IL} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{EH}{JI} = \frac{FG}{KL} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

Tampak bahwa perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian senilai.

Jadi, persegi panjang (ii) dan (iii) sebangun.

Ingat: EFGH sebangun dengan JKLI, tetapi EFGH tidak sebangun dengan IJKL

Jadi, pasangan persegi panjang yang sebangun adalah persegi panjang (ii) dan (iii).

Contoh 3 **Menentukan Panjang Sisi dan Besar Sudut yang Belum Diketahui Dari Dua Bangun Datar Sebangun**

Perhatikan gambar di bawah ini.

Bangun *ABCD* dan *EFGH* sebangun.

Tentukan:

a. nilai x, y dan z,

b. panjang sisi *EF*, *BC*, dan *HG*,

c. perbandingan luas *EFGH* dan *ABCD*.

Alternatif Penyelesaian:

Bangun *ABCD* dan *EFGH* sebangun berarti sudut-sudut yang bersesuaian sama besar dan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian senilai, yaitu:

$m\angle E = m\angle A$, $m\angle F = m\angle B$, $m\angle G = m\angle C$, $m\angle H = m\angle D$,

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} = \frac{HE}{DA}$$

a. Bangun *ABCD* dan *EFGH* sebangun dengan sudut-sudut yang bersesuaian

$m\angle E = m\angle A$, $m\angle F = m\angle B$, $m\angle G = m\angle C$, dan $m\angle H = m\angle D$,

Sehingga,

$m\angle G = m\angle C \quad \Leftrightarrow \quad x^\circ = 22{,}6^\circ$

$m\angle \mathrm{D} = 180^\circ - m\angle \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad y^\circ = 180^\circ - x^\circ = 180^\circ - 22{,}6^\circ = 157{,}4^\circ$ (*Mengapa?*)

$m\angle H = m\angle D \quad \Leftrightarrow \quad z^\circ = y^\circ = 157{,}4^\circ$

Jadi, nilai adalah $x^\circ = 22{,}6^\circ$, $y^\circ = 157{,}4^\circ$, dan $z^\circ = 157{,}4^\circ$

b. Perbandingan sisi yang bersesuaian adalah

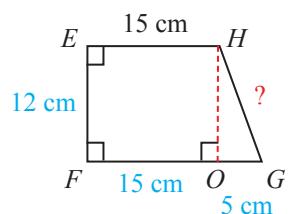
$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} = \frac{HE}{DA}$$

pada gambar diketahui bahwa

$$\frac{HE}{DA} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Sehingga,

$$\frac{EF}{AB} = \frac{HE}{DA} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{EF}{16} = \frac{3}{4}$$

$$EF = \frac{16 \times 3}{4} = 12$$

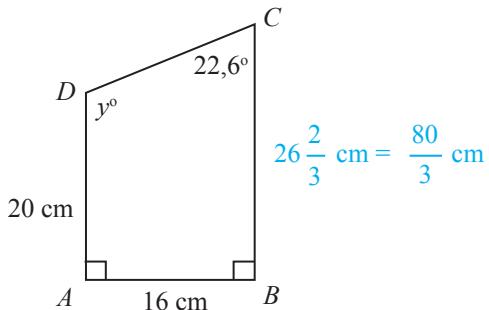
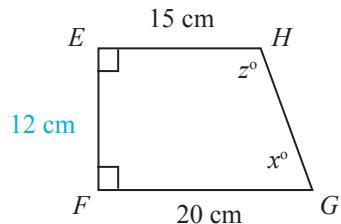
Selanjutnya, menghitung panjang *BC* sebagai berikut:

$$\frac{FG}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{20}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$BC = \frac{20 \times 4}{3} = 26\frac{2}{3}$$

Untuk mencari panjang *HG*, buat garis bantuan *HO* seperti pada gambar di samping. Sehingga,

$FO = EH = 15$ cm, $HO = EF = 12$ cm, $OG = FG - FO = 20 - 15 = 5$ cm

Gunakan teorema Phytagoras untuk menghitung panjang *HG* (lihat segitiga *HOG*)

$$HG = \sqrt{HO^2 + OG^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Jadi, panjang $EF = 12$ cm, $BC = 26\frac{2}{3}$ cm, dan $HG = 13$ cm.

c.

$$\frac{\text{Luas } EFGH}{\text{Luas } ABCD} = \frac{½(EH + FG) \times EF}{½(AD + BC) \times AB}$$

$$= \frac{½(15+20) \times 12}{½\left(20+\frac{80}{3}\right) \times 16}$$

$$= \frac{35 \times 3}{\frac{140}{3} \times 4}$$

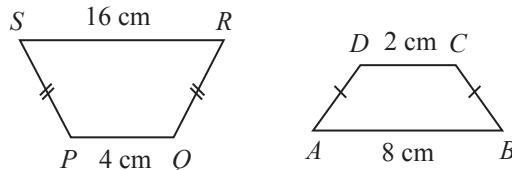
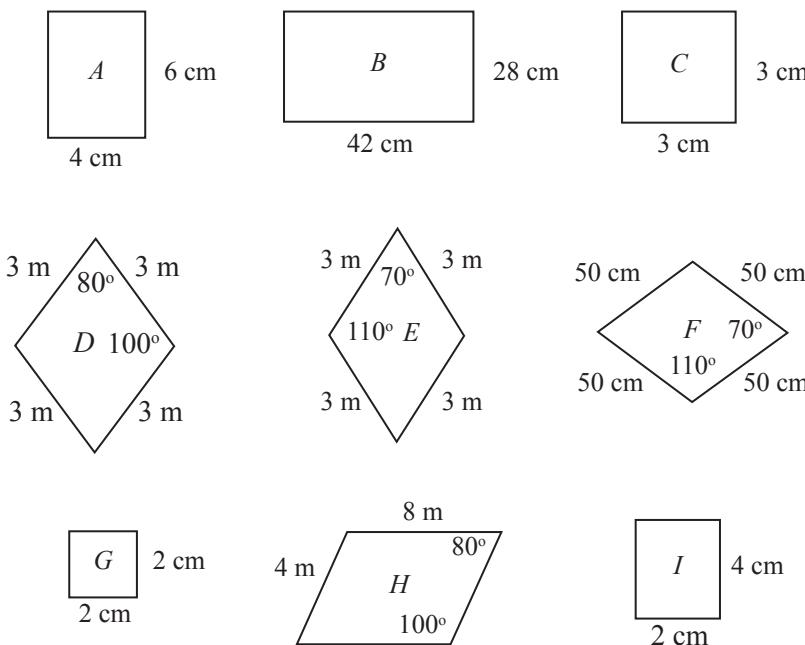
$$= \frac{35 \times 3}{4} \times \frac{3}{140}$$

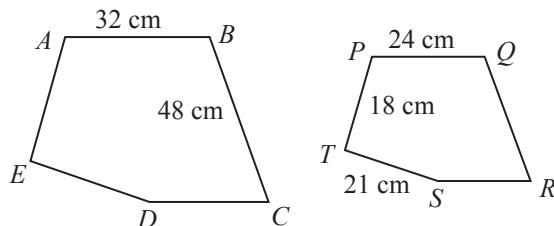
$$= \frac{9}{16}$$

Jadi, perbandingan luas *EFGH* dan *ABCD* adalah 9 : 16.

Pada Contoh 3, misalkan perbandingan luas *EFGH* dan *ABCD* adalah 9 : 16. Apakah kaitannya dengan perbandingan sisi yang bersesuaian bangun *EFGH* dan *ABCD* yaitu

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} = \frac{HE}{DA} = \frac{3}{4}$$

Diketahui dua bangun segi banyak (poligon) yang sebangun. Jika perbandingan panjang sisi yang bersesuaian adalah $x : y$, apakah pasti perbandingan luasnya adalah $x^2 : y^2$? Berikan penjelasan.

Diketahui dua bangun segi banyak (poligon) yang sebangun. Jika perbandingan panjang sisi yang bersesuaian adalah $x : y$, apakah pasti perbandingan volumenya adalah $x^3 : y^3$? Berikan penjelasan.

Latihan 4.3 Kesebangunan Bangun Datar

Selesaikan soal-soal di bawah ini dengan benar dan sistematis.

1. Selidikilah apakah dua trapesium di bawah ini sebangun? Jelaskan.

2. Carilah pasangan bangun yang sebangun di antara gambar di bawah ini.

C 3 cm

3 cm

G 2 cm

2 cm

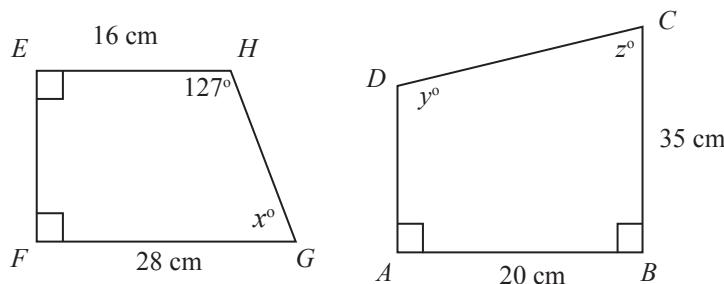
8 m

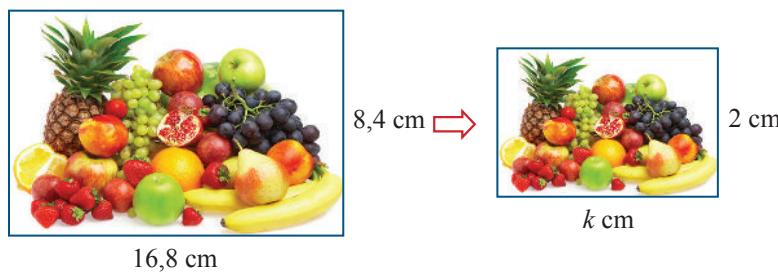
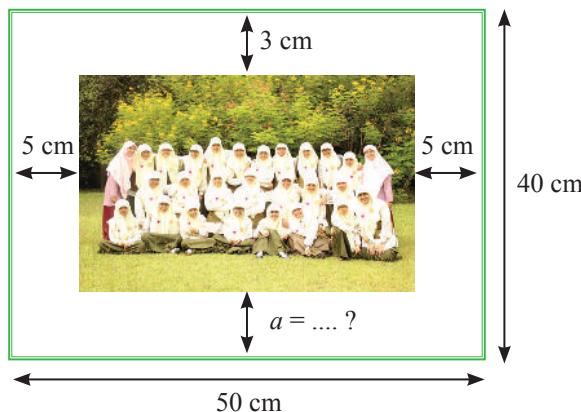
4 m 80°

H

100°

I 4 cm

2 cm

3. Perhatikan dua bangun yang sebangun pada gambar di bawah ini.

Hitunglah panjang sisi *AE*, *ED*, dan *QR*.

4. Dua buah bangun di bawah ini sebangun.

Hitunglah:

a. Panjang *EF*, *HG*, *AD*, dan *DC*.

b. Nilai x, y dan z.

5. Sebuah gambar berbentuk persegi panjang berukuran 16,8 cm × 8,4 cm. Gambar tersebut diperkecil sehingga ukurannya menjadi k cm × 2 cm. Hitunglah panjang k.

Sumber: www.prasoudadietreviewblog.com

6. Sebuah foto diletakkan pada selembar karton yang berukuran 50 cm × 40 cm, sebelum dipasang di pigura. Di bagian sisi kiri, kanan, atas, dan bawah foto diberi jarak seperti nampak pada gambar. Foto dan karton tersebut sebangun.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

a. Berapa lebar karton di bagian bawah yang tidak tertutup oleh foto tersebut?

b. Berapa perbandingan luas foto dan luas karton?

7. Sebuah batako berukuran panjang 24 cm, lebar 12 cm, dan tingginya 8 cm dengan berat 1,6 kg. Terdapat miniatur batako yang sebangun dengan batako tersebut dan terbuat dari bahan yang sama dengan batako asli. Ukuran panjang miniatur batako 6 cm. Hitunglah:

   a. lebar dan tinggi miniatur batako,

   b. perbandingan volume batako asli dan batako miniatur,

   c. berat miniatur batako (dalam gram).

8. Panjang sisi terpendek dari dua buah segi enam (*hexagon*) sebangun adalah 10 cm dan 8 cm. Jika luas segi enam yang besar adalah 200 cm^2, berapakah luas segi enam yang kecil?

9. **Usaha Konveksi**

   Wina mempunyai usaha konveksi. Untuk mengetahui bahan kain yang dibutuhkan, sebelum memproduksi dalam jumlah besar ia membuat sampel baju ukuran kecil dengan skala ¼ terhadap ukuran sebenarnya. Ternyata satu sampel tersebut membutuhkan kain sekitar 0,25 m^2. Berapa luas kain yang dibutuhkan jika ia mendapat pesanan untuk memproduksi baju tersebut sebanyak 1.000 baju?

Sumber: Dokumen Kemdikbud

10. **Botol Air Mineral**

   Ada dua macam kemasan air mineral, yaitu botol ukuran sedang dan besar. Kedua kemasan tersebut sebangun. Botol sedang tingginya 15 cm dan botol besar tingginya 25 cm. Volume botol besar adalah 1.250 ml. Berapa volume botol kecil?

Sumber: Dokumen Kemdikbud

11. **Denah Rumah**

    Perhatikan gambar denah rumah di bawah ini.

Sumber: www.desainic.com

    Denah di atas menggunakan skala 1 : 200. Hitunglah:

    a. ukuran dan luas garasi sebenarnya,
    b. ukuran dan luas kamar mandi sebenarnya,
    c. luas taman depan sebenarnya,
    d. luas rumah sebenarnya (tanah dan bangunan).

12. **Miniatur Kereta Api**

    Sebuah miniatur salah satu gerbong kereta api dibuat dengan material yang sama dengan kereta api sebenarnya. Panjang miniatur kereta api tersebut adalah 40 cm, panjang sebenarnya adalah 10 m, dan berat miniatur adalah 4 kg. Berapakah berat kereta api sebenarnya?

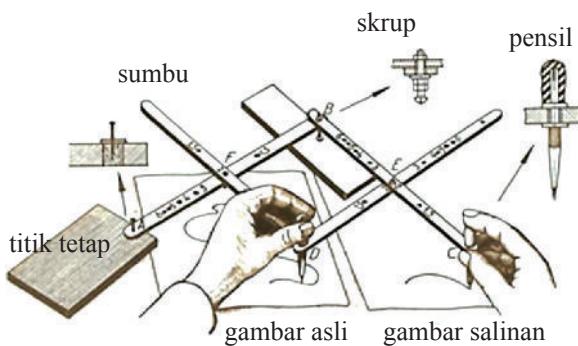
Sumber: www.kereta-api.co.id

4.4 Kesebangunan Dua Segitiga

Pertanyaan Penting

Tahukah kamu, pada saat teknologi mesin fotokopi, kamera, dan komputer belum ditemukan bagaimana cara manusia menduplikat, memperbesar, atau memperkecil suatu gambar?

Bagaimana mengidentifikasi dua segitiga atau lebih sebangun? Bagaimana syarat yang harus dipenuhi sehingga dua segitiga atau lebih dikatakan sebangun?

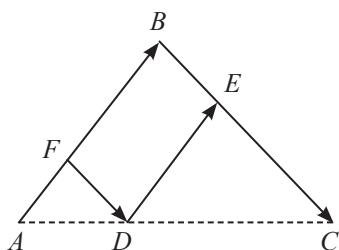
Bagaimana pula cara mengukur tinggi bangunan atau pohon yang tinggi tanpa mengukurnya secara langsung?

Kegiatan 1 Pantograf

Ada salah satu alat gambar yang diciptakan oleh Christooph Scheiner sekitar tahun 1630 yang digunakan untuk membuat salinan gambar dengan skala yaitu pantograf. Prinsip kerja pantograf menggunakan konsep kesebangunan.

Ayo Kita Amati

Amatilah gambar pantograf di bawah ini.

Sumber: www.desainic.com

Saat pensil pada gambar asli digerakkan, pensil pada sisi kanan secara otomatis akan membuat salinannya. Ukuran salinan gambar dapat disesuaikan dengan mengubah posisi sumbu.

Dengan mengamati dan memahami cara kerja pantograf, kamu bisa membuat pantograf sendiri dan membuat salinan gambar dengan skala tertentu.

Berdasarkan gambar di samping, sumbu-sumbu pada gambar pantograf tersebut dapat diwakili oleh gambar di bawah ini.

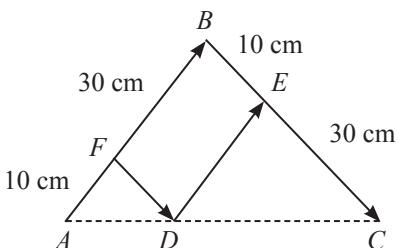
Pada gambar di samping titik tetapnya adalah *A* dan gambar aslinya adalah *D*. Pensil gambar salinan berada pada titik *C*. Lengan *AB* dan *BC* sama panjang. *FD* selalu sejajar dengan *BC* dan *AB* selalu sejajar dengan *DE*.

Menurut kamu apakah ΔABC dan ΔAFD sebangun? Untuk menjawabnya coba kamu selidiki besar sudut-sudut dan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

Untuk menyelidiki besar sudut-sudutnya gunakan sifat-sifat garis sejajar yang dipotong oleh suatu garis.

Perhatikan ΔABC dan ΔAFD.

$m\angle BAC = m\angle$... (karena ....)

$m\angle ABC = m\angle$... (karena ....)

$m\angle BCA = m\angle$... (karena ....)

Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar?

Misalkan dibuat rancangan pantograf berukuran *AF* = 10 cm, *FB* = 30 cm, *EC* = 30 cm, *BE* = 10 cm, *AD* = 14 cm, dan *DC* = 42 cm.

Berapa panjang DE dan FD?

Berapa skala perbesaran pada pantograf tersebut?

Seperti tampak pada gambar di samping bahwa *FD* sejajar dengan *BE* dan *FB* sejajar dengan *DE*, akibatnya jelas bahwa *FD* = *BE* = 10 cm dan *DE* = *FB* = 30 cm.

Sekarang coba selidiki perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian yaitu

$$\frac{AB}{AF}, \frac{BC}{FD}, \frac{AC}{AD}$$

Apakah $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FD}$?

Berapa skala perbesaran pantograf tersebut?

Gambar yang dihasilkan nanti berapa kali ukuran gambar aslinya?

Nah, dengan menyelesaikan permasalahan di atas kamu telah menggunakan konsep kesebangunan dua bangun yaitu gambar asli dengan gambar hasil perbesarannya.

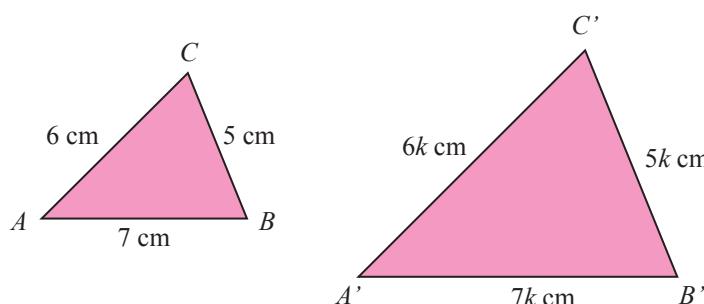
Bersama temanmu, coba buatlah pantograf yang bisa menghasilkan salinan gambar lima kali lebih besar.

Presentasikan pantograf hasil karya kelompokmu tersebut beserta gambar salinannya.

Pada Subbab B kamu telah mempelajari bahwa dua bangun datar dikatakan sebangun jika memenuhi dua syarat sebagai berikut.

a. perbandingan panjang sisi yang bersesuaian senilai

b. sudut yang bersesuaian besarnya sama

Bagaimana menguji kesebangunan dua segitiga tanpa harus menguji kedua syarat di atas? Melalui kegiatan berikut ini, coba kamu temukan jawabannya.

Kegiatan 2 Syarat Dua Segitiga Sebangun

Kerjakanlah kegiatan berikut ini bersama kelompokmu.

1. Gambarlah ΔABC dengan panjang sisi sesuai keinginanmu

   Misalkan seperti gambar berikut:

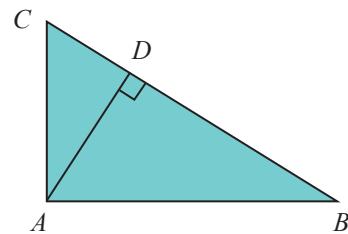
2. Gambarlah $\Delta A'B'C'$ dengan panjang sisi k kali panjang sisi ΔABC.

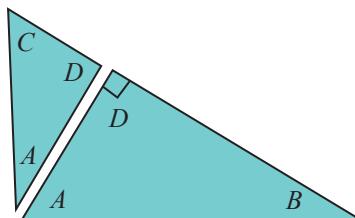
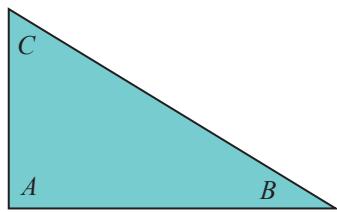
   (boleh diperbesar atau diperkecil)

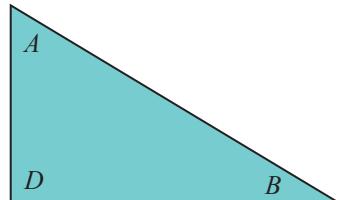
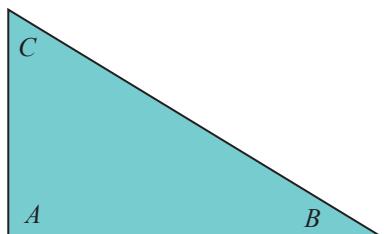
3. Ukurlah besar tiap-tiap sudut ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ dengan menggunakan busur derajat. Bandingkan sudut-sudut yang bersesuaian dari dua segitiga tersebut.

4. Bandingkan hasilnya dengan temanmu.
5. Diskusikan dengan temanmu dan jawablah pertanyaan berikut:
   a) Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar?
   b) Berapa perbandingan panjang sisi $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$?
   c) Apakah segitiga yang diperpesar atau diperkecil dengan faktor skala yang sama akan sebangun dengan segitiga semula?
6. Dari Subbab 4.2 kamu telah mengetahui bahwa dua segitiga kongruen jika panjang sisi yang bersesuaian sama. (kriteria *sisi - sisi - sisi*)
   Dalam hal ini ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ kongruen jika $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 1$.
   Berdasarkan no. 5, menurut kamu apakah ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ sebangun jika $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$, dengan k tetap (konstan)? Selidikilah.
7. Dari Subbab 4.2 kamu telah mengetahui bahwa dua segitiga kongruen jika dua pasang sisi yang bersesuaian sama panjang dan sudut yang diapitnya sama besar. (kriteria *sisi – sudut – sisi*)
   Dalam hal ini, ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ kongruen jika $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = 1$ dan $m\angle B = m\angle B'$. Menurut kamu apakah ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ sebangun jika $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = k$, dengan k tetap (konstan) dan $m\angle B = m\angle B'$? Selidikilah.
8. Dari Subbab 4.2 kamu telah mengetahui bahwa dua segitiga kongruen jika dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sepasang sisi yang bersesuaian sama panjang. (kriteria *sudut – sudut – sisi*)
   Dalam hal ini, ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ kongruen jika $\frac{A'B'}{AB} = 1$, $m\angle B = m\angle B'$, dan $m\angle C = m\angle C'$. Menurut kamu apakah ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ sebangun jika $\frac{A'B'}{AB} = k$, dengan k tetap (konstan), $m\angle B = m\angle B'$, dan $m\angle C = m\angle C'$? Bagaimana jika $\frac{A'B'}{AB} = k$ diabaikan, menurutmu apakah ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ sebangun jika $m\angle B = m\angle B'$, dan $m\angle C = m\angle C'$? Selidikilah.

Berdasarkan kegiatan di atas (khususnya nomor 6, 7, dan 8), menurutmu bagaimana syarat yang lebih sederhana sehingga dua segitiga sebangun?

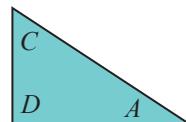
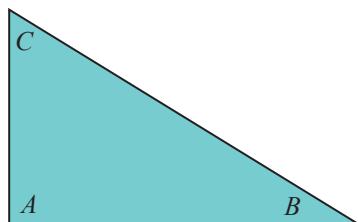
Dua segitiga sebangun jika memenuhi salah satu syarat berikut ini:
1. ....
2. ....
3. ....

Kegiatan 3 Kesebangunan Khusus dalam Segitiga Siku-Siku

Alat dan bahan yang diperlukan:

- Kertas lipat
- Pensil
- Penggaris
- Busur derajat
- Gunting

Kerjakanlah kegiatan berikut ini bersama kelompokmu.

1. Gambarlah segitiga siku-siku seperti gambar di samping (ukuran boleh berbeda), lalu guntinglah pada sisi *AB*, *BC*, dan *AC*. Buatlah sekali lagi. Sehingga kamu mempunyai dua buah segitiga *ABC*.

2. Guntinglah salah satu segitiga *ABC* tersebut pada garis *AD*. Sehingga kamu sekarang mempunyai tiga buah segitiga yaitu ΔABC, ΔDBA dan ΔDAC.

3. Perhatikan ΔABC dan ΔDBA

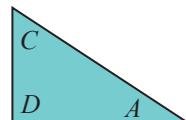
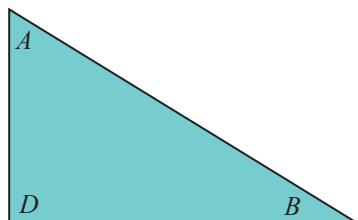
Tumpuklah ΔABC dan ΔDBA tersebut, di mana $\angle B$ saling berhimpit.

Selidikilah apakah ΔABC dan ΔDBA sebangun? (gunakan kesimpulan yang sudah kamu peroleh dari *Kegiatan 2 tentang syarat dua bangun sebangun*).

Jika ΔABC dan ΔDBA sebangun, tuliskan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

dan kamu akan memperoleh bahwa: $AB^2 = \dots \times \dots$

4. Perhatikan ΔABC dan ΔDAC

Tumpuklah ΔABC dan ΔDAC tersebut, di mana $\angle B$ pada ΔABC dan $\angle A$ pada ΔDAC saling berhimpit.

Selidikilah apakah ΔABC dan ΔDAC sebangun? (gunakan kesimpulan yang sudah kamu peroleh ΔABC *Kegiatan 2 tentang syarat dua bangun sebangun*)

Jika ΔABC dan ΔDAC sebangun, tuliskan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

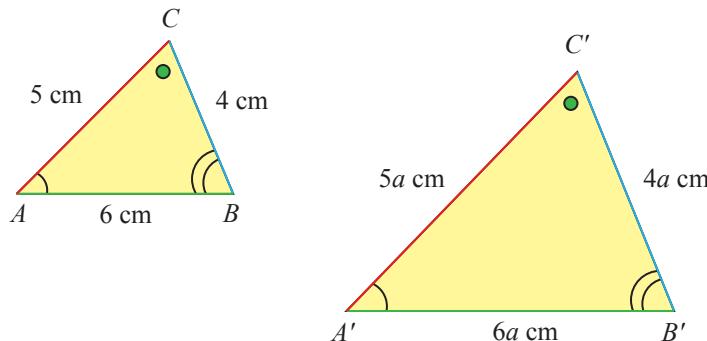
dan kamu akan memperoleh bahwa: $AC^2 = \dots \times \dots$

5. Perhatikan ΔDBA dan ΔDAC

Tumpuklah ΔDBA dan ΔDAC tersebut, di mana $\angle B$ pada ΔDBA dan $\angle A$ pada ΔDAC saling berhimpit.

Selidikilah apakah ΔDBA dan ΔDAC sebangun? (gunakan kesimpulan yang sudah kamu peroleh dari *Kegiatan 2 tentang syarat dua bangun sebangun*)

Jika ΔDBA dan ΔDAC sebangun, tuliskan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

dan kamu akan memperoleh bahwa: $AD^2 = \dots \times \dots$

Materi Esensi 4.4 Kesebangunan Dua Segitiga

Dua segitiga dikatakan sebangun jika hanya jika memenuhi syarat berikut ini.

(i) Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian senilai.

(ii) Besar sudut-sudut yang bersesuaian sama.

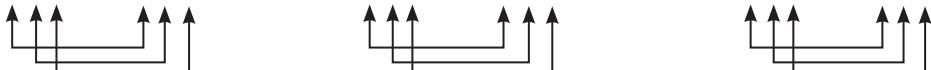
(i) Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian senilai

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = a$$

(ii) Besar sudut-sudut yang bersesuaian sama

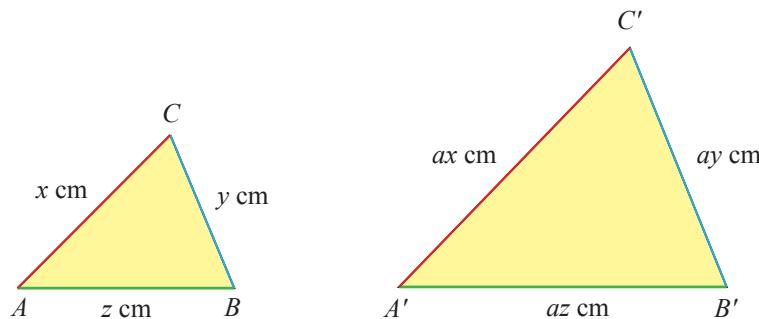
$m\angle A = m\angle A'$

$m\angle B = m\angle B'$

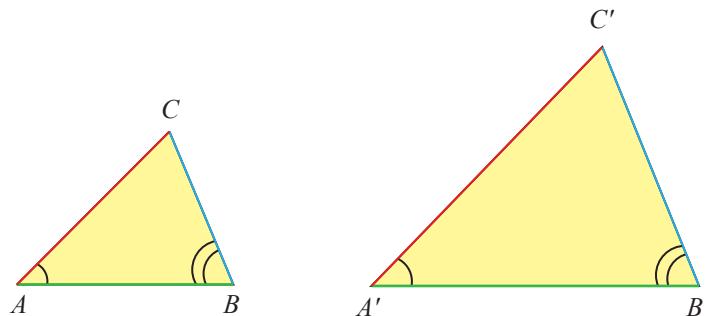
$m\angle C = m\angle C'$

Jika ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ memenuhi syarat tersebut, maka ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ sebangun, dinotasikan dengan $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Jika ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ tidak memenuhi syarat, tersebut maka ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ tidak sebangun, dinotasikan dengan $\Delta ABC \nsim \Delta A'B'C'$.

Catatan:

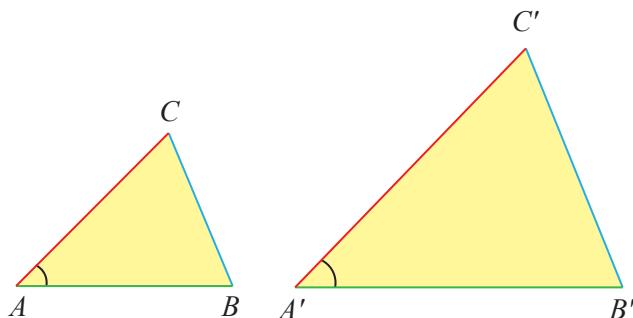
Ketika menyatakan dua segitiga sebangun sebaiknya berdasarkan titik-titik sudut yang bersesuaian dan berurutan, contohnya:

bukan $\Delta ABC \cong \Delta B'C'A'$ atau $\Delta ABC \cong \Delta C'A'B'$ atau yang lainnya.

Syarat Dua Segitiga Sebangun

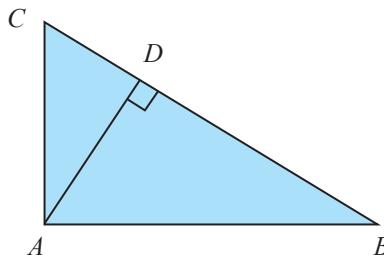
Untuk lebih sederhana, berdasarkan Kegiatan 2, dua segitiga dikatakan sebangun (misal: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$), jika memenuhi salah satu kondisi berikut ini.

1. Perbandingannya ketiga pasangan sisi yang bersesuaian sama, yaitu:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = a$$

2. Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar.

   Contoh: $m\angle A = m\angle A'$ dan $m\angle B = m\angle B'$

3. Perbandingan dua pasang sisi yang bersesuaian sama dan sudut yang diapitnya sama besar.

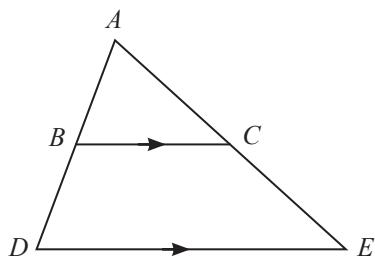
Contoh:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = a$$

dan

$m\angle A = m\angle A'$

Kesebangunan Khusus dalam Segitiga Siku-Siku

Perhatikan gambar. Berdasarkan Kegiatan 3, dengan memperhatikan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ dan $\Delta DBA \sim \Delta DAC$, diperoleh:

$$AB^2 = BD \times BC$$

$$AC^2 = CD \times CB$$

$$AD^2 = DB \times DC$$

Contoh 1 **Membuktikan Dua Segitiga Sebangun**

Perhatikan gambar di bawah ini.

Buktikan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Alternatif Penyelesaian:

Pada ΔABC dan ΔADE dapat diketahui bahwa:

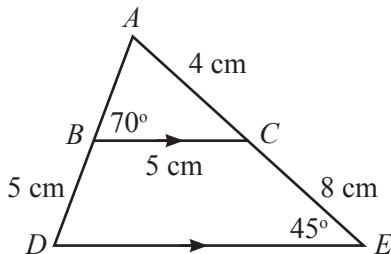
$m\angle ABC = m\angle ADE$

(karena $BC // DE$, dan $\angle ABC$ sehadap $\angle ADE$)

$m\angle BAC = m\angle DAC$

$m\angle BAC = m\angle DAC$

(karena $\angle BAC$ dan $\angle DAC$ berhimpit)

Karena dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar, jadi $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. (terbukti)

Contoh 2 **Menghitung Panjang Sisi dan Besar Sudut yang Belum Diketahui dari Dua Segitiga Sebangun**

Perhatikan gambar di bawah ini.

Tentukan

a. panjang sisi DE dan AB

b. besar $\angle ACB$, $\angle ADE$ dan $\angle DAE$

Alternatif Penyelesaian:

Pada Contoh 1, sudah dibuktikan bahwa ΔABC dan ΔADE sebangun.

a. Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian adalah

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

Diketahui:

panjang $AC = 4$ cm, $AE = AC + CE = 4 + 8 = 12$ cm, maka

$$\frac{AC}{AE} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

panjang $BC = 5$ cm, maka

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{5}{DE} = \frac{1}{3}$$

$$DE = 5 \times 3$$

$$DE = 15$$

panjang $BD = 5$ cm, maka

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AB}{AB + BD} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AB}{AB + 5} = \frac{1}{3}$$

$$3AB = 1\ (AB + 5)$$

$$3AB = AB + 5$$

$$3AB - AB = 5$$

$$2AB = 5$$

$$\frac{2AB}{2} = \frac{5}{2}$$

$$AB = 2{,}5$$

Jadi panjang DE = 15 cm dan AB = 2,5 cm

b. Sudut-sudut yang bersesuaian besarnya sama

$m\angle ABC = m\angle ADE$ (*Mengapa?*)

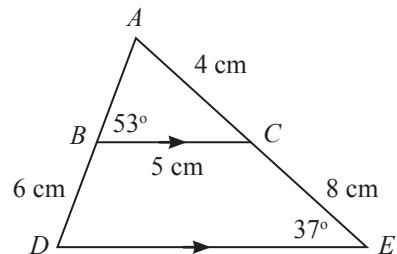
$m\angle ACB = m\angle AED$ (*Mengapa?*)

$m\angle BAC = m\angle DAE$ (*Mengapa?*)

A
4 cm
B
53°
C
5 cm
6 cm
8 cm
37°
D
E

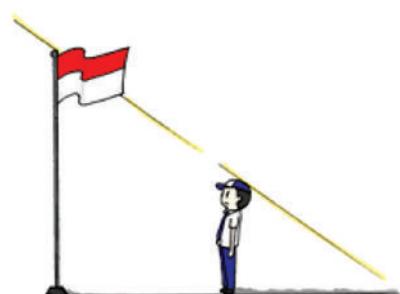
Sehingga,

$m\angle ACB = m\angle AED = 37^o$

$m\angle ADE = m\angle ABC = 53^o$

$m\angle DAE = 180^o - (m\angle ADE + m\angle AED)$ (*Mengapa?*)

$= 180^o - (53^o + 37^o)$

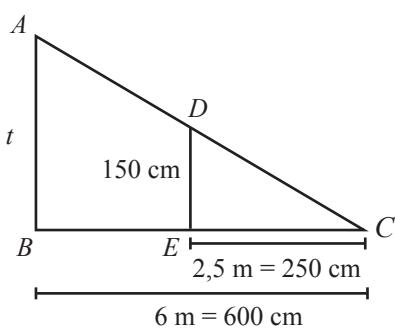
$= 180^o - 90^o$

$= 90^o$

Jadi, $m\angle ACB = 37^o$, $m\angle ADE = 53^o$, dan $m\angle DAE = 90^o$.

Contoh 3 Penerapan Sederhana dari Kesebangunan Segitiga

Diketahui seorang siswa dengan tinggi badan 150 cm menghadap tiang bendera pada pagi hari yang cerah. Panjang bayangan siswa adalah 2,5 m dan panjang bayangan tiang bendera adalah 6 m. Tentukan tinggi tiang bendera tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui:

Tinggi badan siswa = 150 cm

Panjang bayangan siswa = 2,5 m = 250 cm

Panjang bayangan tiang bendera = 6 m = 600 cm

Misal tinggi tiang bendera = t

Permasalahan di atas dapat dibuat model atau sketsa sebagai berikut:

$\Delta ABC \sim \Delta DEC$, sehingga

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CE}$$

$$\frac{t}{150} = \frac{600}{250}$$

$$250\,t = 150 \times 600$$

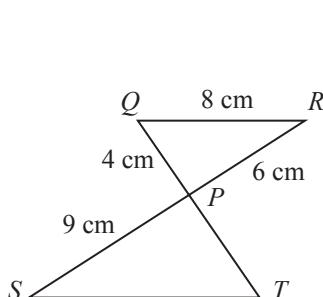
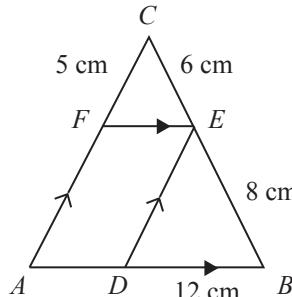
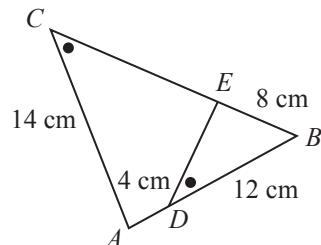
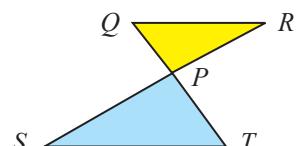
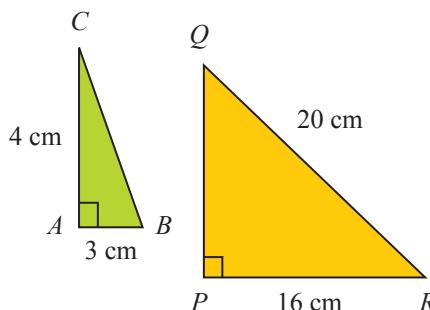
$$t = \frac{150 \times 600}{250}$$

$$t = 360$$

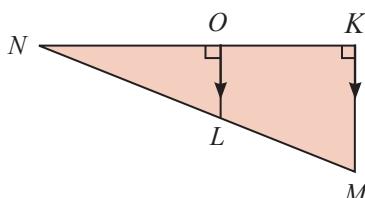
Jadi, tinggi tiang bendera tersebut adalah 360 cm atau 3,6 m.

Setelah mempelajari contoh-contoh di atas, pertanyaan apakah yang muncul di benakmu. Silakan tanyakan pada guru dan temanmu.

Coba pikirkan alternatif cara lain bagaimana menyelesaikan permasalahan yang serupa dengan Contoh 3 di atas jika tanpa menggunakan bayangan objek yang diamati.

Coba kamu cari informasi dari buku, internet atau lainnya mengenai berbagai cara memperkirakan tinggi pohon, tinggi gedung, tinggi bukit, atau lebar sungai secara tidak langsung dengan alat bantu seadanya.

Carilah pula alat ukur modern apa saja yang bisa digunakan untuk itu dan jelaskan cara kerjanya.

Diskusikan dengan temanmu masalah berikut ini.

1. Tentukan pasangan segitiga yang sebangun pada gambar di bawah ini. Buktikan.
2. Hitunglah panjang sisi-sisi yang belum diketahui.

Latihan 4.4 Kesebangunan Dua Segitiga

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar dan sistematis.

1. Pada gambar di samping, *QR*//*ST*.
   a. Buktikan bahwa ΔQRP dan ΔTSP sebangun.
   b. Tuliskan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

2. Perhatikan gambar berikut.

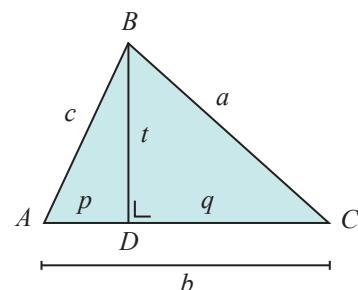
a. Buktikan bahwa ΔABC dan ΔPQR sebangun.

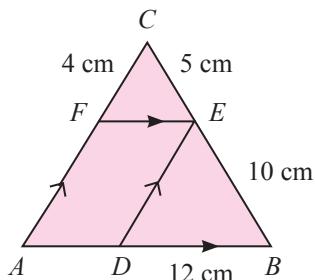
b. Tuliskan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

3. Perhatikan gambar berikut.

Apakah ΔKMN sebangun dengan ΔOLN? Tunjukkan.

4. Pada ΔABC dan ΔPQR diketahui $m\angle A = 105^o$, $m\angle B = 45^o$, $m\angle P = 45^o$, dan $m\angle Q = 105^o$.

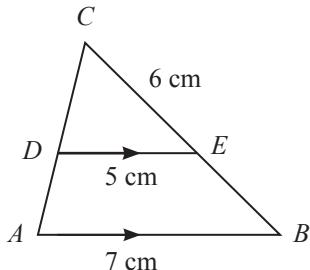
   a. Apakah kedua segitiga tersebut sebangun? Jelaskan.

   b. Tulislah pasangan sisi yang mempunyai perbandingan yang sama.

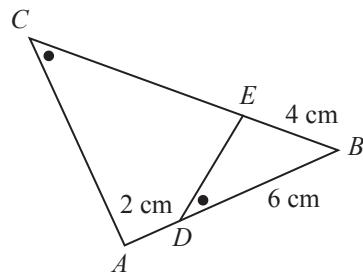
5. Perhatikan gambar.

   Diketahui $m\angle ABC = 90^o$, siku-siku di B.

   a. Tunjukkan bahwa ΔADB dan ΔABC sebangun.

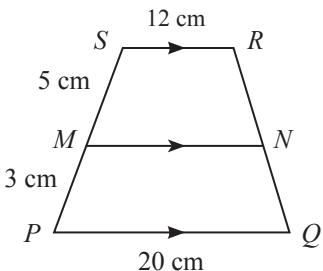
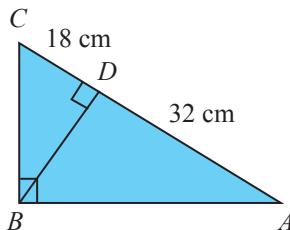
   b. Tunjukkan bahwa ΔBDC dan ΔABC sebangun.

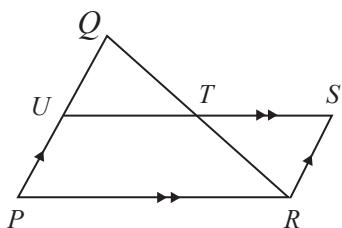
6. Perhatikan gambar.

a. Tunjukkan bahwa $\Delta FCE \sim \Delta ACB$.

b. Tunjukkan bahwa $\Delta FCE \sim \Delta DEB$.

c. Tunjukkan bahwa $\Delta ACB \sim \Delta DEB$.

d. Tentukan panjang FE dan AF.

7. Perhatikan gambar.

a. Hitunglah panjang *EB*

b. Hitunglah panjang *CE*

8. Perhatikan gambar.

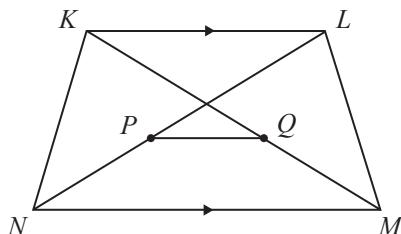
Hitunglah panjang *MN* pada gambar di bawah ini.

9. Perhatikan gambar.

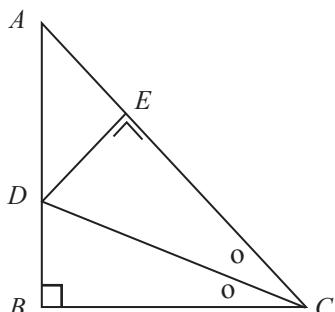
Tentukan:

a. Pasangan segitiga yang sebangun.

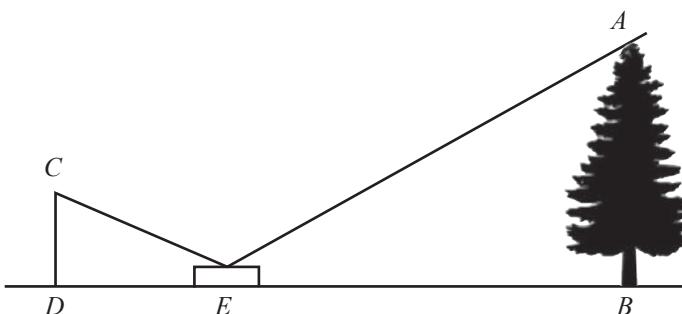
b. Pasangan sudut yang sama besar dari masing-masing pasangan segitiga yang sebangun tersebut.

c. Pasangan sisi bersesuaian dari masing-masing pasangan segitiga yang sebangun tersebut.

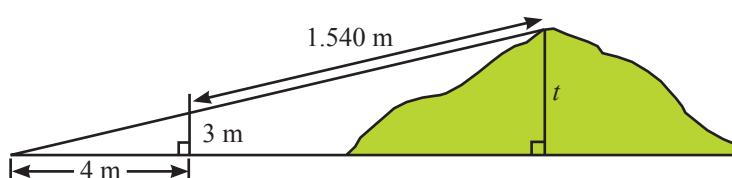
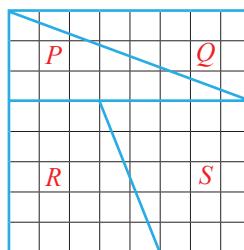
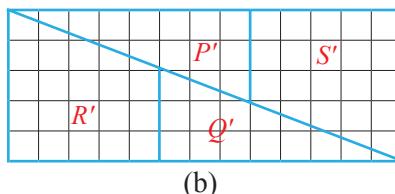
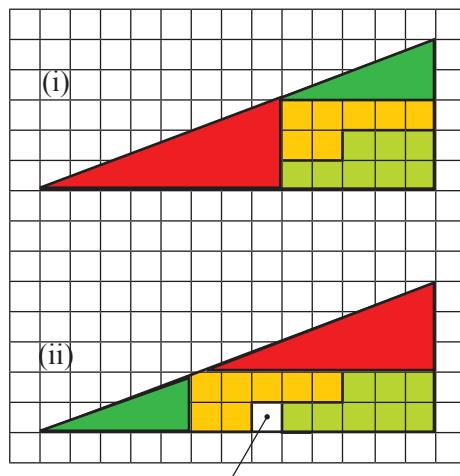
d. Panjang sisi *BA*, *BC*, dan *BD*.

10. Perhatikan gambar.

Diketahui $PR = 15$ cm dan $QU = \frac{2}{3}\ UP$.
Tentukan panjang *TS*.

11. Perhatikan gambar.

Diketahui KL = 10 cm dan MN = 14 cm. P dan Q berturut-turut adalah titik tengah LN dan KM. Tentukan panjang PQ.

12. Perhatikan gambar.

Segitiga ABC adalah segitiga siku-siku sama kaki. Jika AB = 10 cm dan CD garis bagi sudut C, Tentukan panjang BD.

13. **Memperkirakan Tinggi Rumah**
    Pada suatu sore, sebuah rumah dan pohon yang bersebelahan memiliki panjang bayangan berturut-turut 10 m dan 4 m. Jika tenyata tinggi pohon sebenarnya adalah 10 m, tentukan tinggi rumah tersebut sebenarnya.

14. **Memperkirakan Tinggi Pohon**
    Untuk menentukan tinggi sebuah pohon, Ahmad menempatkan cermin di atas tanah (di titik E) seperti gambar di bawah ini. Dari titik E Ahmad berjalan mundur (ke titik D), sedemikian hingga dia dapat melihat ujung pohon pada cermin. Teman Ahmad mengukur panjang BE = 18 m, ED = 2,1 m dan ketika berdiri jarak mata Ahmad ke tanah (CD) adalah 1,4 m. Perkirakan tinggi pohon tersebut.

15. **Memperkirakan Tinggi Bukit**
Dua mahasisiwa Teknik Sipil Agung dan Ali ingin memperkirakan tinggi suatu bukit terhadap posisinya berdiri yang tidak jauh dari bukit itu. Mereka menggunakan bantuan peralatan laser yang dipasang pada sebuah tongkat penyangga setinggi 3 m dari permukaan tanah. Agung mengamati puncak bukit melalui alat tersebut dan diperoleh garis pandang ke puncak bukit adalah 1.540 m. Ali berbaring di tanah memandang ke arah ujung peralatan tersebut dan puncak bukit sehingga tampak sebagai garis lurus. Posisi mata Ali berjarak 4 m dari tongkat penyangga. Perkirakan tinggi bukit tersebut.
(perhatikan gambar)

16. **Analisis Kesalahan**
Gambar (a) menunjukkan persegi dengan panjang sisi 8 satuan. Persegi itu dibagi menjadi 4 bagian yaitu dua segitiga (*P* dan *Q*), serta dua trapesium (*R* dan *S*). Gambar (b) menunjukkan persegi panjang berukuran 5 satuan × 13 satuan. Persegi itu dibagi menjadi 4 bagian yaitu dua segitiga (*P'* dan *Q'*), serta dua trapesium (*R'* dan *S'*). Apakah $8 \times 8 = 5 \times 13$? Jika tidak, bagaimana kamu menjelaskan hal ini? Di mana letak kesalahannya?

(a)

(b)

17. **Analisis Kesalahan**

Perhatikan gambar di bawah ini! Jelaskan di manakah letak kesalahannya?

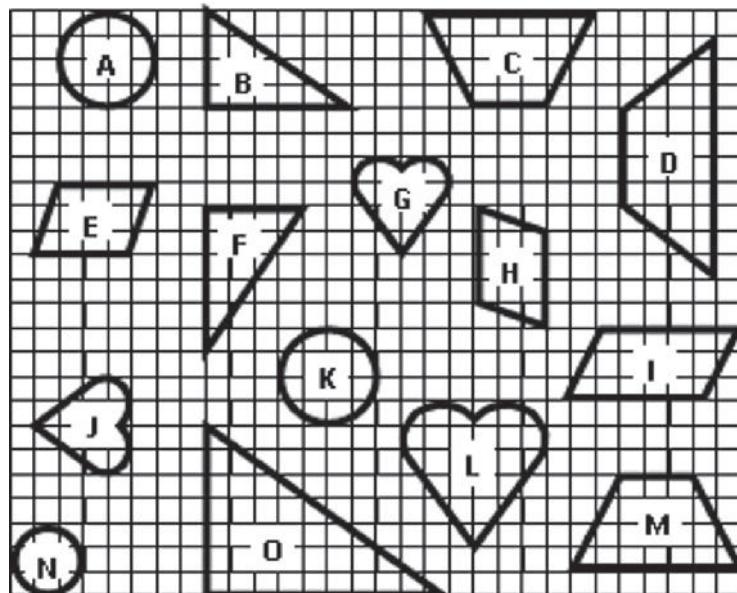
Jelaskan dari manakah lubang satu kotak ini berasal?

Proyek 4

Kerjakan proyek di bawah ini bersama kelompokmu.

1. Perhatikan gambar jembatan Suramadu dan jembatan Barito di bawah ini.

(i) Jembatan Suramadu (ii) Jembatan Barito

Sumber: www.pesonawisatasurabaya.files.wordpress.com
www.jalan2.com

a. Berdasarkan gambar di atas, susunlah strategi bagaimana kamu dapat memperkirakan tinggi tiang jembatan Suramadu dan jembatan Barito dari jalan raya tepat di bawahnya.

b. Berdasarkan strategi tersebut kira-kira berapa tinggi tiang jembatan Suramadu dan jembatan Barito tersebut dari jalan raya tepat di bawahnya?

c. Presentasikan hasil kerja kelompokmu di kelas.

2. Coba carilah gedung, pohon, tiang listrik, atau tiang bendera yang ada di sekitar sekolahmu. Bersama temanmu, lakukan kegiatan ini.

   a. Buat strategi untuk memperkirakan tinggi gedung, pohon, tiang listrik, atau tiang bendera tersebut dengan menggunakan konsep kesebangunan dua segitiga. (minimal dua strategi yang berbeda).

   b. Berdasarkan strategi yang kamu buat, perkirakan berapa tinggi gedung, pohon, tiang listrik, atau tiang bendera tersebut.

   c. Presentasikan hasil kerja kelompokmu di kelas.

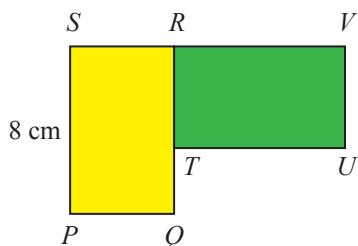
3. Coba carilah sungai atau danau yang ada di sekitar sekolah atau rumahmu.

   Bersama temanmu, lakukan kegiatan ini.

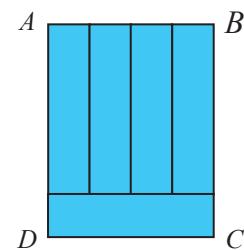
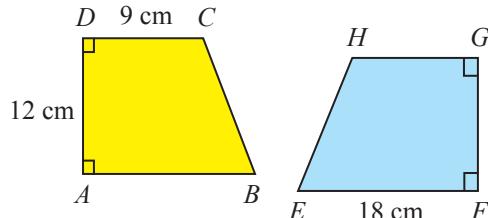
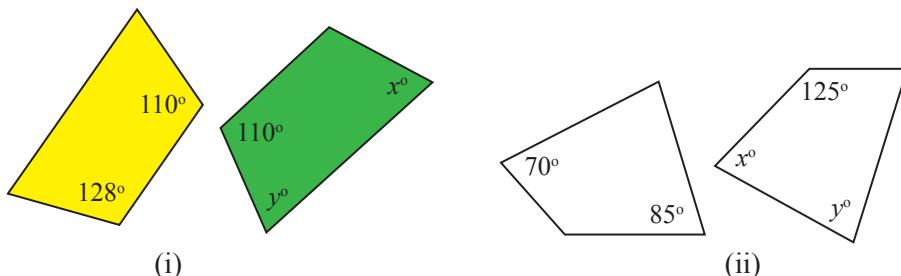
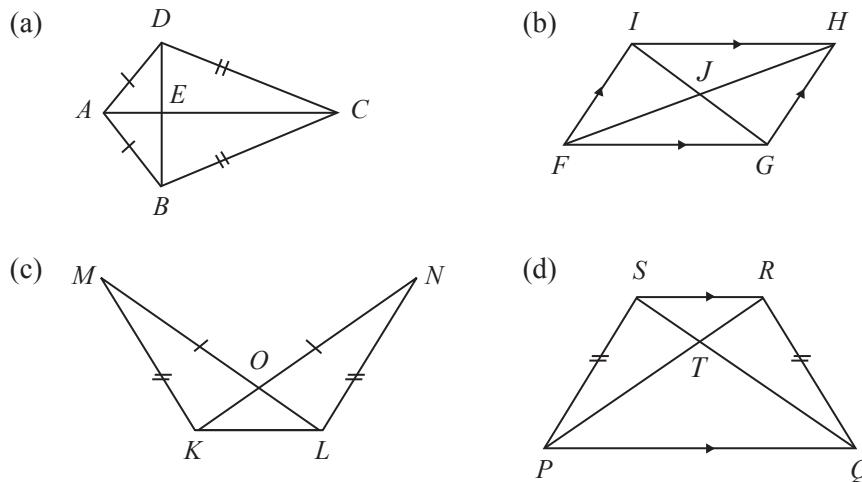
   a. Buatlah strategi untuk memperkirakan lebar sungai atau danau tersebut dengan menggunakan konsep kesebangunan atau kekongruenan dua segitiga.

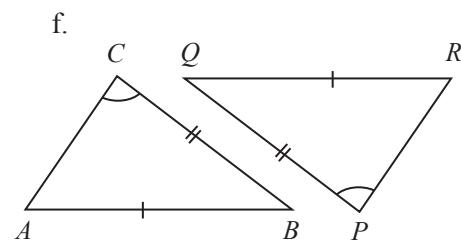
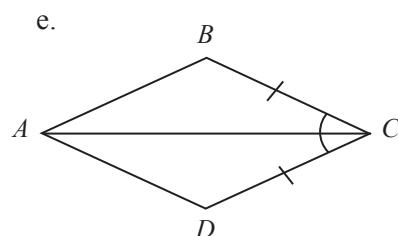
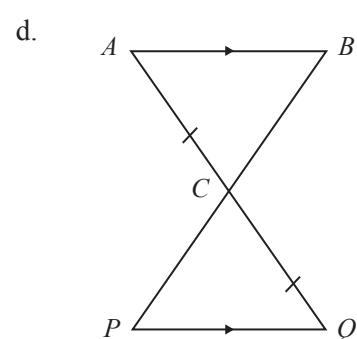
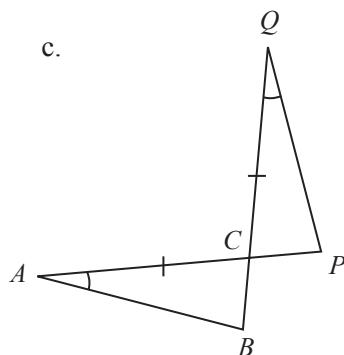
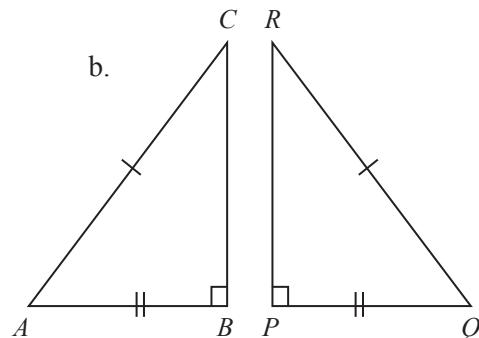
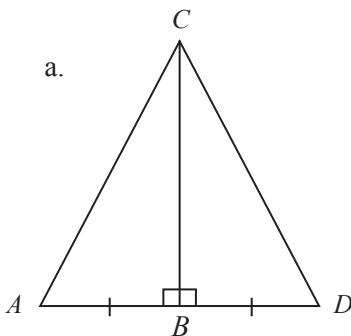
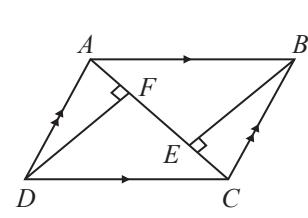
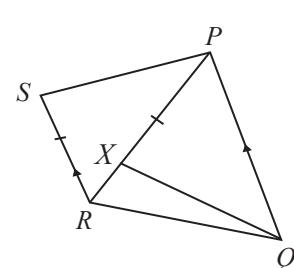
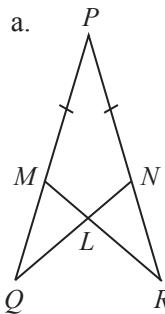
   b. Berdasarkan strategi yang kamu buat, perkirakan berapa lebar gedung, pohon, tiang listrik atau tiang bendera tersebut.

   c. Presentasikan hasil kerja kelompokmu di kelas.

4. Bersama temanmu, buatlah pantograf yang bisa menghasilkan salinan gambar k kali lebih besar (boleh $k = 2, 3, 4, 5$ atau lebih). Dokumentasikan prosesnya. Presentasikan pantograf hasil karya kelompokmu tersebut beserta gambar salinannya.

Uji Kompetensi 4 Kekongruenan dan Kesebangunan

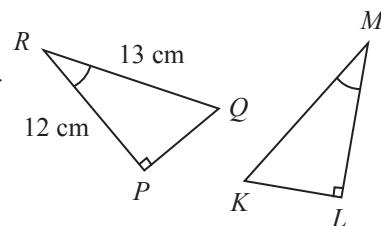
Selesaikan soal-soal berikut dengan benar dan sistematis.

1. Perhatikan gambar di bawah ini. Tulislah pasangan bangun yang kongruen.

2. Perhatikan gambar di bawah.

Jika *PQRS* kongruen dengan *UVRT* dan $RT = \frac{3}{5}RQ$, tentukan panjang *PQ*.

3. Perhatikan gambar.
Persegi panjang *ABCD* dibentuk dari 5 persegi panjang yang kongruen. Jika keliling setiap persegi panjang kecil adalah 20 cm, maka tentukan keliling dan luas *ABCD*.

4. Diketahui trapesium *ABCD* dan trapesium *FEHG* pada gambar di bawah ini adalah kongruen. Jika panjang $AD = 12$ cm, $DC = 9$ cm, dan $EF = 18$ cm, tentukan panjang *CB*.

5. Pasangan bangun di bawah ini kongruen, tentukan nilai x dan y pada gambar.

6. Perhatikan gambar di bawah ini.

Berapa banyak pasangan segitiga kongruen pada setiap bangun di atas? Tuliskan semua pasangan segitiga kongruen tersebut.

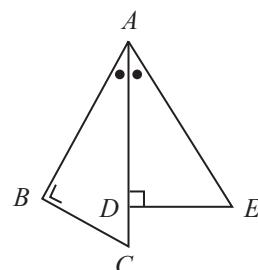
7. Apakah pasangan segitiga berikut ini pasti kongruen? Jika ya, kriteria apakah yang menjamin pasangan segitiga berikut ini kongruen?

a.
b.
c.
d.
e.
f.
8. Tuliskan satu pasangan segitiga kongruen pada setiap bangun berikut dan tunjukkan.

a.
$PM = PN$ dan $PQ = PR$

b.
$PX = SR$ dan ΔPQR segitiga sama sisi

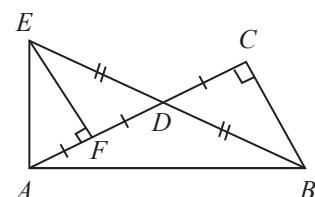
c.

9. Perhatikan gambar.

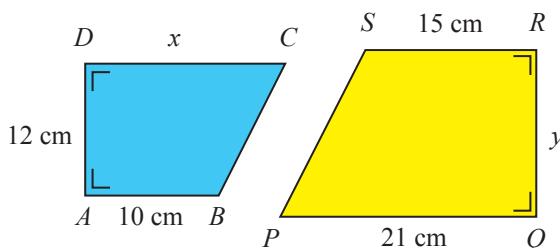
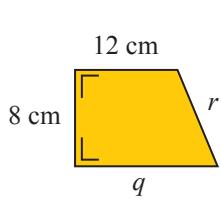
   Diketahui $\Delta PQR \cong \Delta LKM$ dan $m\angle PQR = 60^o$.

   Tentukanlah:

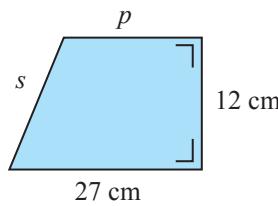
   a. besar $m\angle PRQ$
   b. besar $m\angle LKM$
   c. besar $m\angle KML$
   d. panjang KL
   e. panjang KM

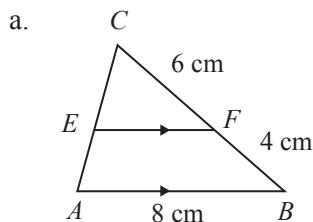
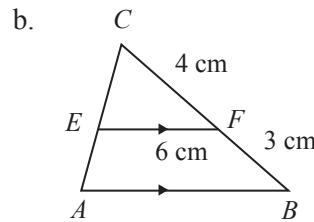
10. Perhatikan gambar di samping.

    Diketahui $AC = AE$ dan $m\angle BAC = m\angle DAE$

    a. Tunjukkan bahwa $\Delta ABC \cong \Delta ADE$.
    b. Jika $CD = 2$ cm dan $AE = 10$ cm, tentukanlah panjang BC dan AB

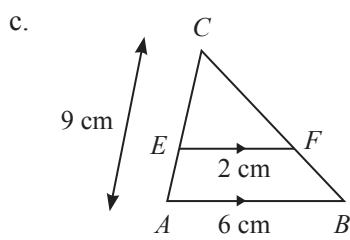
11. Perhatikan gambar di samping.

    Diketahui panjang $AB = 13$ cm dan $EF = 5$ cm.

    a. Buktikan bahwa $\Delta AFE \cong \Delta DFE$
    b. Buktikan bahwa $\Delta DCB \cong \Delta DFE$
    c. Hitunglah panjang AC
    d. Hitunglah panjang AE

12. Apakah bangun di bawah ini pasti sebangun? Jelaskan.

    a. dua persegi
    b. dua lingkaran
    c. dua segitiga sama sisi
    d. dua belah ketupat

13. Trapesium $ABCD$ sebangun dengan trapesium $RSPQ$, tentukan nilai x dan y pada gambar di bawah.

14. Perhatikan gambar berikut ini.

a. Jika trapesium (i) dan (ii) sebangun, tentukan nilai p, q, r dan s.

b. Tentukan perbandingan keliling trapesium (i) dan (ii).

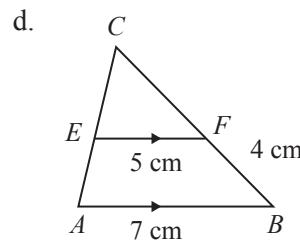
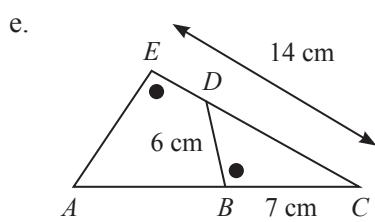
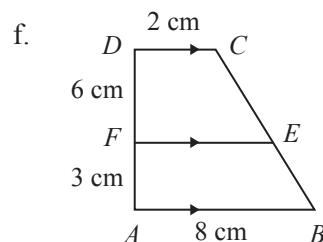
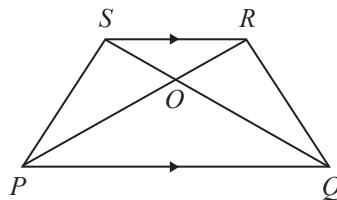
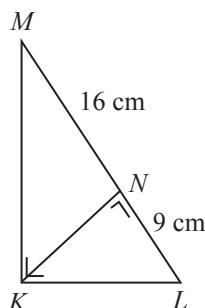
c. Tentukan perbandingan luas trapesium (i) dan (ii).

15. Hitunglah panjang sisi yang ditanyakan pada gambar berikut ini.

a.
$EF = ...$ cm

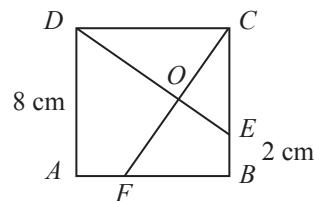
b.
$AB = ...$ cm

c.
$AE = ...$ cm

d.
$CF = ...$ cm

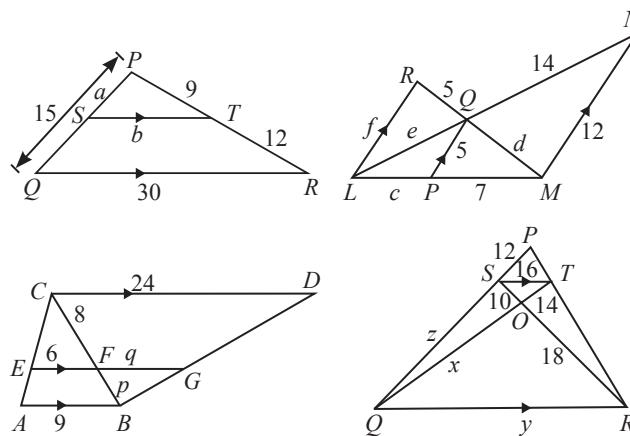
e.
$AE = ...$ cm

f.
$EF = ...$ cm

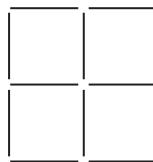
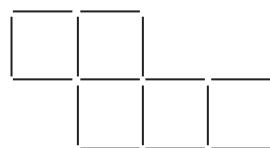
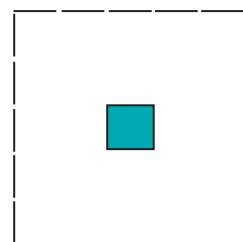
16. Diketahui trapesium sama kaki *PQRS* pada gambar di bawah ini, dengan panjang *SR* = 4 cm, *PQ* = 12 cm, dan *QS* = 20 cm. Tentukan panjang *SO*.

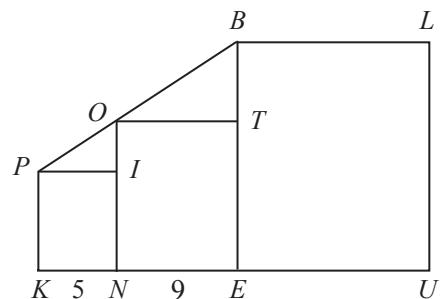
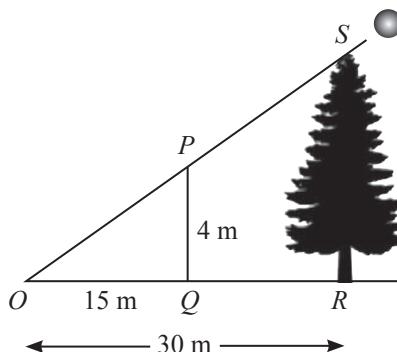
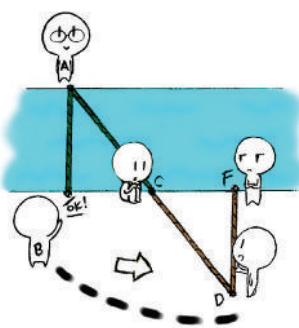
17. Perhatikan gambar.

    a. Tuliskan pasangan segitiga sebangun pada gambar tersebut.

    b. Dari tiap-tiap pasangan segitiga sebangun tersebut, tentukan pasangan sisi yang bersesuaian dan buat perbandingannya.

    c. Tentukan panjang *NK*, *KL,* dan *MK*.

18. *ABCD* adalah persegi.

    Jika *DE* = *CF*, maka tentukanlah panjang:

    a. *DE*
    b. *OE*
    c. *OD*
    d. *OC*
    e. *OF*

19. Hitunglah panjang sisi yang diberi label pada gambar di bawah ini. (semua dalam satuan sentimeter)

20. Dua belas tusuk gigi disusun seperti pada gambar di samping. Dengan memindahkan hanya dua tusuk gigi bagaimana kamu membentuk enam persegi atau tujuh persegi?

21. Enam belas tusuk gigi disusun seperti gambar di samping. Dengan memindahkan hanya dua tusuk gigi bagaimana kamu membentuk empat persegi?

22. Pada gambar di samping ini menunjukkan persegi yang dibentuk dengan 20 tusuk gigi. Di tengahnya terdapat lubang kotak dengan luas $\frac{1}{25}$ luas seluruhnya. Dengan menggunakan 18 tusuk gigi, bagilah luasan di antara persegi luar dan persegi di tengah menjadi 6 daerah yang sebangun.

23. Perhatikan gambar.
    Bangun *PINK*, *NOTE*, dan *BLUE* adalah persegi. Panjang *KN* = 5 cm dan *NE* = 9 cm, Titik *P* – *O* – *B* terletak dalam satu garis lurus. Tentukan panjang sisi dan luas bangun *BLUE*.

24. Pada gambar di bawah ini, tinggi tongkat *PQ* sesungguhnya adalah 4 m dan panjang bayangannya 15 m. Jika panjang bayangan pohon adalah 30 m, tentukan tinggi pohon.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

25. Sekelompok peserta jelajah alam mendapat tugas untuk menaksir lebar suatu sungai tanpa mengukurnya secara langsung. Mereka menentukan titik acuan di seberang sungai yaitu titik *A*. Satu peserta lain berdiri di titik *C*. Peserta yang lain berdiri di titik *B* tepat di depan *A*. Kemudian berjalan menuju ke titik *F* dengan jarak *B* ke *F* adalah dua kali jarak *B* ke *C*. Dari titik *F* ia berjalan menuju titik *D*, di mana dengan pandangannya objek di titik *A*-*C*-*D* terletak pada satu garis lurus. Sehingga lebar sungai dapat diketahui dengan mengukur jarak *F* ke *D*. Apakah cara tersebut tepat utuk menaksir lebar sungai? Jelaskan.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Bab V

Bangun Ruang Sisi Lengkung

Kata Kunci

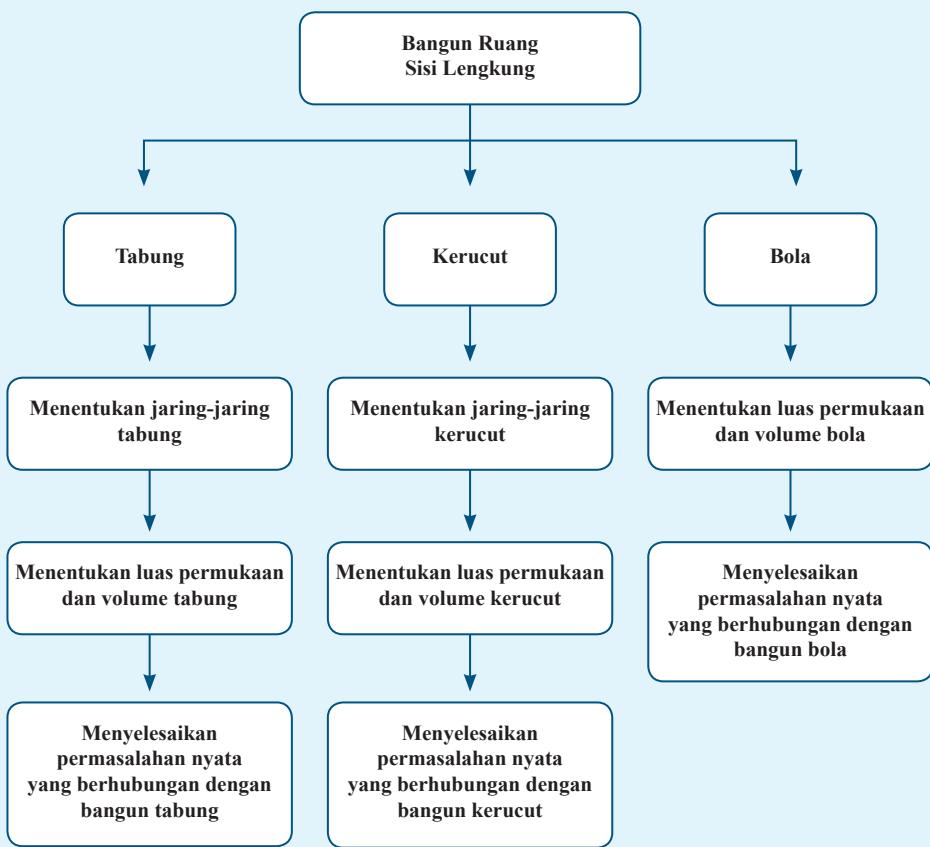
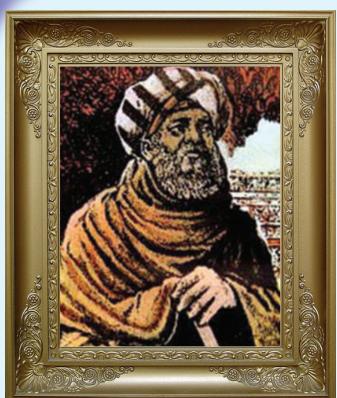
- *Tabung*
- *Kerucut*
- *Bola*
- *Jaring-jaring*
- *Luas Permukaan*
- *Volume*

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Kompetensi Dasar

3.7 *Membuat generalisasi luas permukaan dan volume bangun ruang sisi lengkung (tabung, kerucut dan bola).*

4.7 *Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan luas permukaan dan volume bangun ruang sisi lengkung (tabung, kerucut, dan bola) serta gabungan beberapa bangun ruang sisi lengkung.*

Bangun ruang sisi lengkung merupakan bangun ruang yang memiliki minimal satu sisi lengkung. Tong sampah, cone eskrim, topi ulang tahun dan bola basket merupakan model bangun ruang sisi lengkung dalam kehidupan sehari-hari.

Pengalaman Belajar

1. *Mengenali bangun tabung, kerucut dan bola beserta unsur-unsurnya.*
2. *Menentukan jaring-jaring tabung, kerucut dan bola.*
3. *Mengidentifikasi luas permukaan tabung, kerucut dan bola.*
4. *Menentukan hubungan antara luas alas dan tinggi dengan volume.*
5. *Mengidentifikasi volume tabung, kerucut dan bola.*
6. *Menyelesaikan permasalahan nyata.*

Peta Konsep

Bangun Ruang Sisi Lengkung
Tabung
Kerucut
Bola
Menentukan jaring-jaring tabung
Menentukan jaring-jaring kerucut
Menentukan luas permukaan dan volume bola
Menentukan luas permukaan dan volume tabung
Menentukan luas permukaan dan volume kerucut
Menyelesaikan permasalahan nyata yang berhubungan dengan bangun bola
Menyelesaikan permasalahan nyata yang berhubungan dengan bangun tabung
Menyelesaikan permasalahan nyata yang berhubungan dengan bangun kerucut

Sumber: serunaihati.blogspot.co.id

Thabit Ibnu Qurra

Thabit (Tsabit) Ibnu qurra Ibnu Marwan al-Sabi al-Harrani atau yang lebih dikenal dengan nama **Thabit Ibn Qurra** adalah seorang ilmuwan yang berasal dari Harran (Turki sekarang) yang menguasai ilmu matematika, astronomi dan mekanika. Selain itu, karena keahliannya dalam bahasa ia juga telah menerjemahkan sejumlah besar karya-karya dari Yunani ke Arab. Tsabit bin Qurrah lahir pada tahun 833 di Haran, Mesopotamia. Ia dikenal sebagai ahli geometri terbesar pada masa itu. Tsabit merupakan salah satu penerus karya al-Khawarizmi. Beberapa karyanya diterjemahkan dalam bahasa Arab dan Latin, khususnya karya tentang Kerucut Apollonius. Tsabit juga pernah menerjemahkan sejumlah karya ilmuwan Yunani, seperti Euclides, Archimedes, dan Ptolomeus.

Karya orisinal Archimedes yang diterjemahkannya berupa manuskrip berbahasa Arab, yang ditemukan di Kairo. Setelah diterjemahkan, karya tersebut kemudian diterbitkan di Eropa. Pada tahun 1929, karya tersebut diterjemahkan lagi dalam bahasa Jerman. Adapun karya Euclides yang diterjemahkannya berjudul *On the Promises of Euclid; on the Propositions of Euclid* dan sebuah buku tentang sejumlah dalil dan pertanyaan yang muncul jika dua buah garis lurus dipotong oleh garis ketiga. Hal tersebut merupakan salah satu bukti dari pernyataan Euclides yang terkenal di dunia ilmu pengetahuan. Selain itu, Tsabit juga pernah menerjemahkan sebuah buku geometri yang berjudul *Introduction to the Book of Euclid*.

Kontribusi besar Thabit terletak dalam matematika dan astronomi. Tsabit merupakan salah satu penerus karya al-Khawarizmi. Beberapa karyanya diterjemahkan dalam bahasa Arab dan Latin, khususnya karya tentang Kerucut Apollonius. Tsabit meninggalkan karya berharga yaitu penentuan luas bumi yang masih dipakai hingga saat ini. Ia juga penemu jam matahari (Mazawil asy-Syamsiyyah).

Buku *Elements* karya Euclides merupakan sebuah titik awal dalam kajian ilmu geometri. Seperti yang dilakukan para ilmuwan muslim lain, Tsabit bin Qurrah pun tidak mau ketinggalan mengembangkan dalil baru tersebut. Ia mulai mempelajari dan mendalami masalah bilangan irasional. Dengan metode geometri, ia ternyata mampu memecahkan soal khusus persamaan pangkat tiga. Sejumlah persamaan geometri yang dikembangkan Tsabit bin Qurrah mendapat perhatian dari sejumlah ilmuwan muslim, terutama para ahli matematika. Salah satu ilmuwan tersebut adalah Abu Ja'far al-Khazin, seorang ahli yang sanggup menyelesaikan beberapa soal perhitungan dengan menggunakan bagian dari kerucut. Para ahli matematika menganggap penyelesaian yang dibuaat Tsabit bin Qurrah sangat kreatif. Tentu saja, hal tersebut disebabkan Tsabit bin Qurrah sangat menguasai semua buku karya ilmuwan asing yang pernah diterjemahkannya.

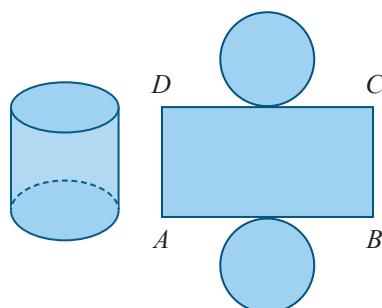
Sumber: https://blogpenemu.blogspot.co.id/2014/12/biografi-thabit-ibn-qurra-astronom-matematikawan-dari-harran-turki.html

http://serunaihati.blogspot.co.id/2012/09/biografi-tsabit-bin-qurrah-ahli.html

5.1 Tabung

Tahukah kamu bentuk dari bangun tabung? Tahukah kamu bagaimana cara untuk mendapatkan rumus luas permukaan dan volume tabung?

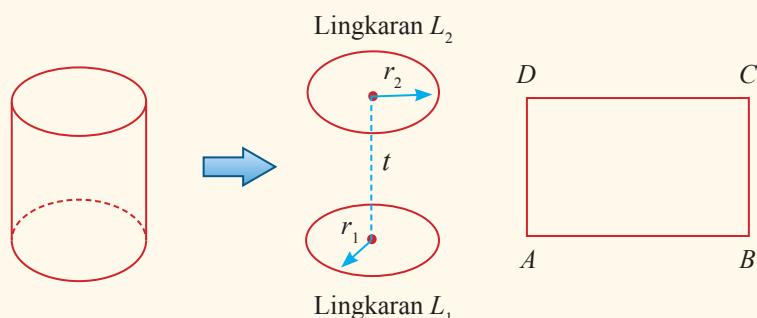
Kerjakan beberapa kegiatan berikut agar kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan-pertanyaan di atas.

Kegiatan 1 Membuat Jaring-Jaring Tabung

Siapkan beberapa alat berikut.

1. Kaleng susu yang masih ada labelnya
2. Alat tulis
3. Penggaris
4. Kertas karton
5. *Cutter* atau gunting

Kerjakan secara berkelompok (3-5 siswa).

1. Dengan menggunakan alat pemotong (*cutter*) dan penggaris, potong label kaleng susu secara vertikal (jangan sampai sobek). Didapatkan label yang berbentuk persegi panjang.
2. Gambarlah persegi panjang pada kertas karton yang sudah disiapkan sesuai ukuran persegi panjang yang diperoleh Langkah 1 dan tandai titik sudutnya dengan huruf A, B, C dan D.
3. Ukur panjang AB dan BC menggunakan penggaris.
   Panjang BC merupakan tinggi kaleng tersebut sedangkan panjang AB merupakan keliling dari lingkaran bawah (alas) dan lingkaran atas (tutup).
4. Ukur jari-jari lingkaran pada kaleng tersebut.
   Dari panjang AB kamu dapat menghitung jari-jari lingkaran, yakni dengan membagi panjang AB dengan 2π.

5. Gambar dua lingkaran dengan jari-jari yang diperoleh dari Langkah 4. Kedua lingkaran tersebut menyinggung/menempel persegi panjang *ABCD* pada sisi *AB* dan *CD*.
6. Gunting gambar yang diperoleh dari Langkah 5. Apakah dari gambar yang telah digunting kamu dapat membuat tabung? Cobalah untuk menempelkan kedua lingkaran dengan persegi panjang.
7. Ilustrasi tabung dan jaring-jaring tabung dapat dilihat pada Gambar 5.1.

Gambar 5.1 Tabung dan jaring–jaring tabung

Unsur-unsur tabung.

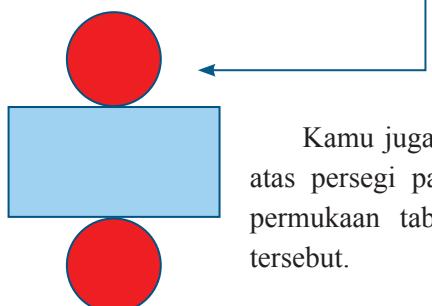
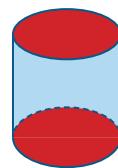
- Daerah lingkaran L_1 merupakan alas tabung dengan jari-jari r_1.
- Daerah lingkaran L_2 merupakan tutup tabung dengan jari-jari r_2.
- Daerah persegi panjang *ABCD* merupakan selimut tabung.
- r_1 dan r_2 merupakan jari-jari tabung ($r_1 = r_2 = r$).

- Jarak titik pusat lingkaran L_1 dengan titik pusat lingkaran L_2 merupakan tinggi tabung (disimbolkan dengan t).
- $AB = CD$ = Keliling daerah lingkaran L_1 = Keliling daerah lingkaran L_2.
- $AD = BC = t$.
- Permukaan tabung terdiri atas dua daerah lingkaran dan sebuah daerah persegi.

Ayo Bertanya

Berdasarkan pengamatanmu terhadap unsur-unsur tabung buatlah beberapa pertanyaan.

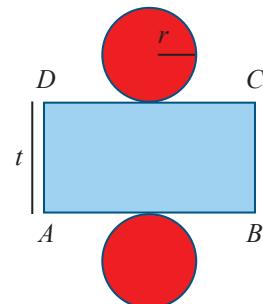
Contoh:

1. Apakah jari-jari tabung selalu lebih pendek daripada tinggi tabung?
2. Bagaimana bentuk selimut tabung?

Kegiatan 2 Mendapatkan Rumus Luas Permukaan Tabung

Kamu telah mengetahui jaring–jaring tabung melalui Kegiatan 1. Dengan menggunakan kalimatmu sendiri jawablah pertanyaan berikut.

1. Bagaimana bentuk muka atau sisi tabung? Berapa banyak sisi tabung tabung?
2. Apakah hubungan antara jaring-jaring tabung dengan luas permukaan tabung?

Permukaan tabung adalah bangun-bangun yang membatasi tabung tersebut. Berdasarkan Kegiatan 1 kamu sudah mengetahui bahwa permukaan tabung terdiri atas dua daerah lingkaran dan sebuah daerah persegi panjang. Luas permukaan tabung merupakan jumlah luas muka atau sisi-sisi tabung.

Kamu juga mengetahui bahwa jaring-jaring tabung terdiri atas persegi panjang dan dua lingkaran yang identik. Luas permukaan tabung sama dengan luas jaring-jaring tabung tersebut.

Gambar di samping merupakan jaring-jaring tabung dengan jari-jari r dan tinggi t. Karena luas permukaan tabung sama dengan luas jaring-jaring tabung maka:

L = Luas permukaan tabung

= Luas jaring-jaring tabung

= 2 × Luas lingkaran + Luas $ABCD$

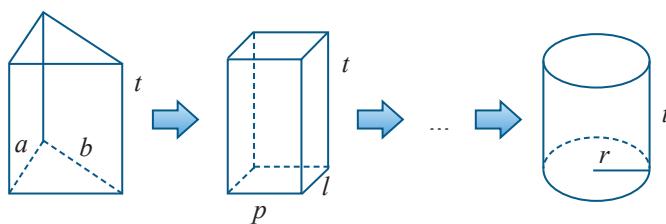
= ... + ...

= ...

Kegiatan 3 Menentukan Volume Tabung Melalui Eksperimen

Kumpulkan uang koin Rp500,00 sebanyak 12 buah. Kerjakan kegiatan ini dengan teman sebangkumu.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

a. Ambil salah satu uang koin, lalu ukurlah diameternya. Hitunglah luas permukaan koin tersebut.
b. Kemudian tumpuk 12 uang koin menjadi satu. Tumpukan uang koin tersebut membentuk tabung. Perkirakan volume tabung yang terbentuk dari tumpukan uang koin tersebut.
c. Berdasarkan butir b, tentukan rumus untuk menghitung volume tabung.

Kegiatan 4 Membandingkan Tabung dengan Bangun Ruang Lainnya

Pada gambar di bawah ini terdapat prisma segitiga, balok, dan tabung dengan tinggi yang sama.

Menurut kamu apakah kesamaan antara prisma, balok, dan tabung di atas?

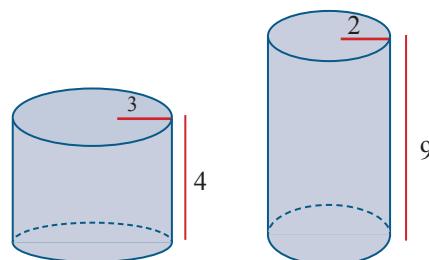
b. Tentukan rumus volume prisma dan balok.

Volume prisma = ... Volume balok = ...

= ... = ...

c. Dari jawaban butir a dan b kamu dapat mendapatkan rumus volume tabung.

Volume tabung = ...

= ...

Kegiatan 5 Membandingkan Volume Dua Tabung

Kamu sudah mengetahui rumus volume tabung melalui Kegiatan 3 dan 4. Perhatikan dua tabung di samping.

a. Hanya dengan memperhatikan kedua tabung, manakah yang memiliki volume lebih besar?

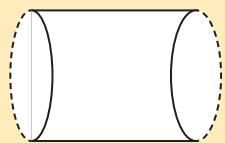
b. Hitung volume kedua tabung, apakah tebakan kamu di pertanyaan bagian (a) benar?

Ayo Kita Simpulkan

a. **Gunakan kalimatmu sendiri**. Bagaimana cara kamu menentukan volume tabung?

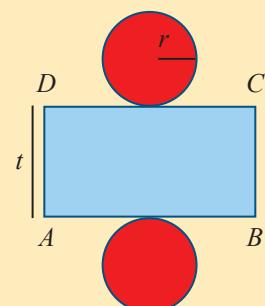
b. Dari hasil (a) diperoleh bahwa volume tabung dengan jari-jari r dan tinggi t adalah

$$V = \ldots$$

Catatan:

Bilangan π sering dituliskan $\pi = 3{,}14$ atau $\pi = \frac{22}{7}$, namun keduanya masih nilai pendekatan. Jika pada soal tidak diperintahkan menggunakan $\pi = 3{,}14$ atau $\pi = \frac{22}{7}$ maka cukup gunakan π saja.

Materi Esensi 5.1 Tabung

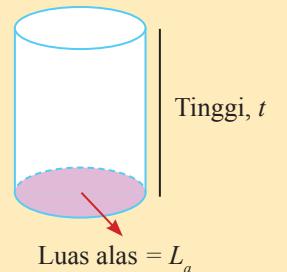
Definisi:

Tabung adalah bangun ruang sisi lengkung yang dibentuk oleh dua buah lingkaran identik yang sejajar dan sebuah persegi panjang yang mengelilingi kedua lingkaran tersebut. Tabung memiliki tiga sisi yakni dua sisi datar dan satu sisi lengkung.

Benda-benda dalam kehidupan sehari-hari yang menyerupai tabung adalah tong sampah, kaleng susu, lilin, dan pipa.

Luas Tabung:

Luas tabung ekuivalen dengan jumlahan semua luas bangun penyusun dari jaring-jaring tabung. Jaring-jaring tabung terdiri atas dua lingkaran dan satu persegi panjang.

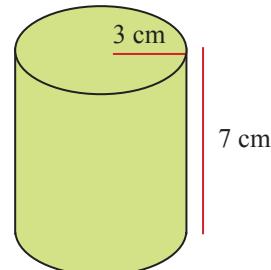
Misalkan terdapat tabung dengan jari jari r dan tinggi t, maka:

$$\begin{aligned} L &= \text{Luas jaring-jaring tabung} \\ &= 2 \times \text{Luas Lingkaran} + \text{Luas } ABCD \\ &= 2\pi r^2 + \overline{AB} \times \overline{BC} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \times t \\ &= 2\pi r(r + t) \end{aligned}$$

Ingat: panjang AB = Keliling lingkaran, panjang BC = tinggi tabung.

Volume Tabung:

Volume tabung adalah hasil perkalian dari luas alas tabung dengan tinggi tabung atau dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$V = L_a \times t$$
$$= \pi r^2 \times t$$

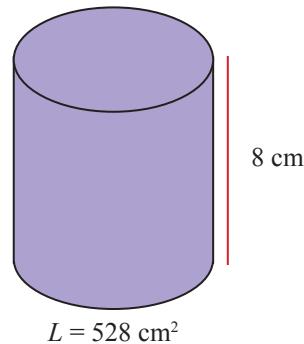
Contoh 1 **Menghitung Luas Permukaan Tabung**

Hitung luas permukaan tabung di samping.

Alternatif Penyelesaian:

Tabung di samping memiliki jari-jari r = 3 cm dan tinggi t = 7 cm, maka luas permukaannya adalah

$L = 2\pi r(r + t)$	rumus luas permukaan tabung
$= 2\pi \times 3 \times (3 + 7)$	substitusi nilai r dan t
$= 60\pi$	

Jadi, luas permukaan tabung adalah 60π cm^2.

Contoh 2 **Menghitung Jari-Jari Tabung Jika Diketahui Luas**

Hitung jari-jari tabung di samping.

Alternatif Penyelesaian:

Tabung di samping memiliki tinggi 8 cm dan luas 528 cm^2.

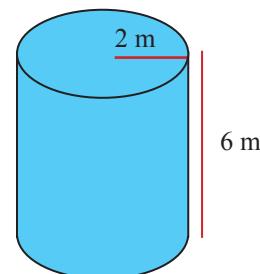
Gunakan $\pi = \frac{22}{7}$.

$L = 2\pi r(r + t)$	rumus luas permukaan tabung
$528 = 2(\frac{22}{7})r(r + 8)$	substitusi nilai L dan t
$84 = r(r + 8)$	kedua ruas dikalikan dengan $\frac{7}{44}$

$84 = 1 \times 84 = 4 \times 21$
$= 2 \times 42 = \mathbf{6} \times \mathbf{14}$
$= 3 \times 28 = 7 \times 12$

Selanjutnya perhatikan tabel di samping.

Diperoleh r = 6, sehingga jari-jari tabung adalah 6 cm.

Contoh 3 — Menghitung Volume Tabung

Hitung volume tabung di samping.

Alternatif Penyelesaian:

Tabung di samping memiliki jari-jari $r = 2$ m dan tinggi $t = 6$ m.

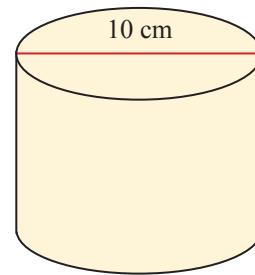
$V = \pi r^2 t$ rumus volume tabung

$= \pi(2)^2 \times 6$ substitusi nilai r dan t

$= 24\pi$

Jadi, volume tabung adalah 24π m^3.

Contoh 4 — Menghitung Tinggi Tabung Jika Diketahui Volume

Hitung tinggi tabung di samping.

Alternatif Penyelesaian:

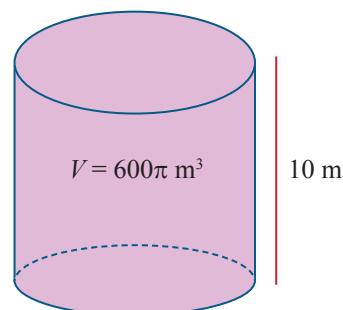
Diameter tabung adalah 10 cm, maka jari-jari tabung adalah $r = 5$ cm dan volumenya adalah 300π cm^3.

$V = \pi r^2 t$ rumus volume tabung

$300\pi = \pi(5)^2 \times t$ substitusi nilai

$300\pi = 25\pi \times t$

$12 = t$ kedua ruas dibagi dengan 25π

Jadi, tinggi tabung adalah 12 cm.

Contoh 5 — Menghitung Jari-Jari Tabung Jika Diketahui Volume

Hitung jari-jari tabung di samping.

Alternatif Penyelesaian:

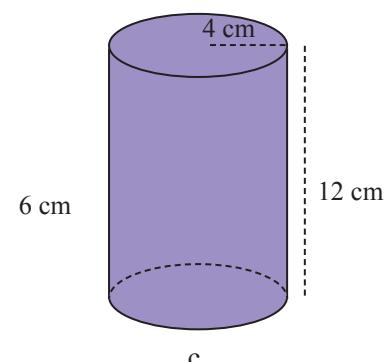
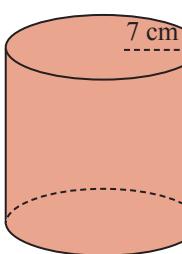
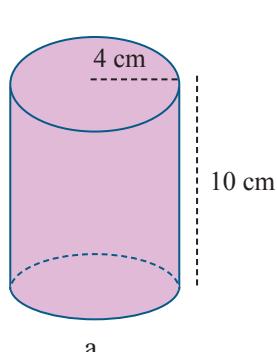
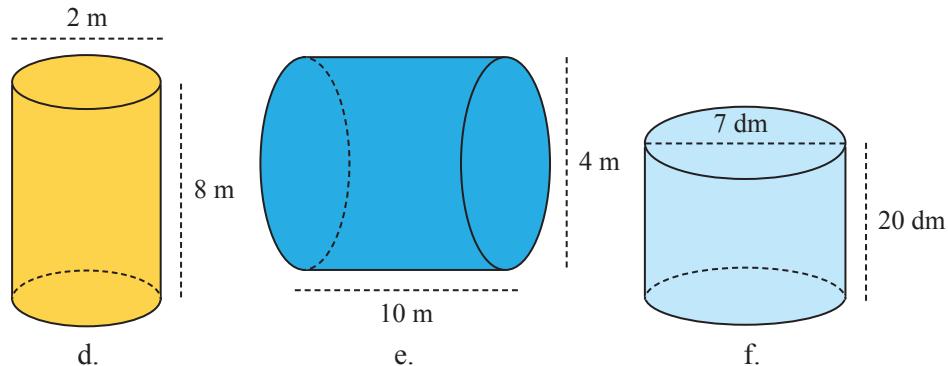
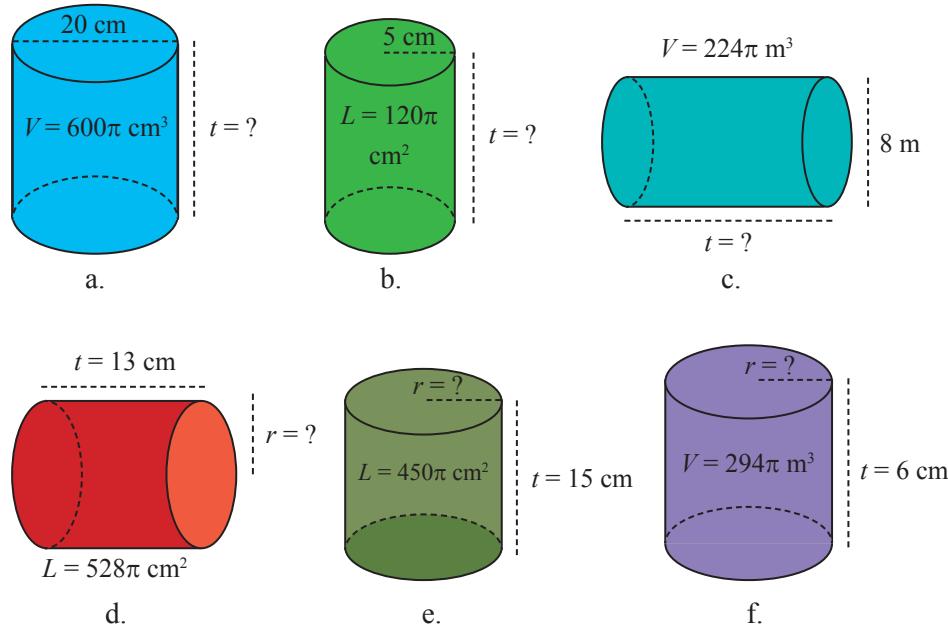
Volume tabung di samping adalah $600\ \pi$ m^3 dan tinggi $t = 10$ m.

$V = \pi r^2 t$ rumus volume tabung

$600\pi = \pi r^2 \times 10$ substitusi nilai V dan t

$60 = r^2$ kedua ruas dibagi dengan 10π

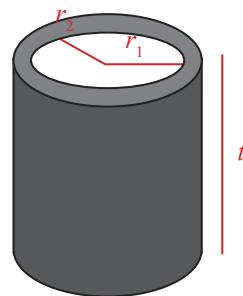
$\sqrt{60} = r$

Jadi, jari-jari tabung adalah $\sqrt{60}$ m.

1. Perhatikan kembali soal pada Contoh 1.
   a. Jika jari-jari dijadikan menjadi dua kali lipat dan tinggi dijadikan ½ kali lipat, berapakah luas permukaan tabung?
   b. Jika jari-jari dijadikan menjadi ½ kali lipat dan tinggi dijadikan dua kali lipat, berapakah luas permukaan tabung?
   c. Dari soal 1.a, 1.b apakah terjadi perubahan luas permukaan tabung? Jelaskan analisismu.
2. Perhatikan kembali soal pada Contoh 3.
   a. Jika jari-jari dijadikan menjadi dua kali lipat dan tinggi dijadikan ½ kali lipat, berapakah volume tabung?
   b. Jika jari-jari dijadikan menjadi ½ kali lipat dan tinggi dijadikan dua kali lipat, berapakah volume tabung?
   c. Dari soal 1.a, 1.b apakah terjadi perubahan luas permukaan tabung? Jelaskan analisismu.

Latihan 5.1 Tabung

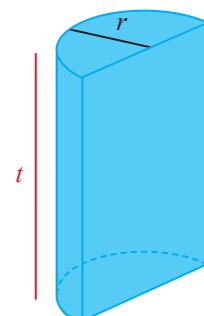
1. Hitung luas permukaan dan volume dari bangun tabung berikut ini:

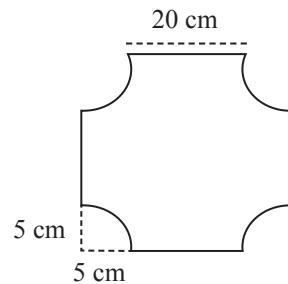
2. Tentukan panjang dari unsur tabung yang ditanyakan.

Ket: V = volume tabung, L = luas permukaan tabung, r = jari-jari tabung,

t = tinggi tabung.

3. **Berpikir Kritis**. Terdapat suatu tabung dengan jari-jari r cm dan tinggi tabung t cm, dimana $r < t$. Misalkan tabung tersebut memiliki volume V cm^3 dan luas permukaan L cm^2. Apakah mungkin $V = L$?

   Jika ya, tentukan nilai $\frac{1}{r} + \frac{1}{t}$.

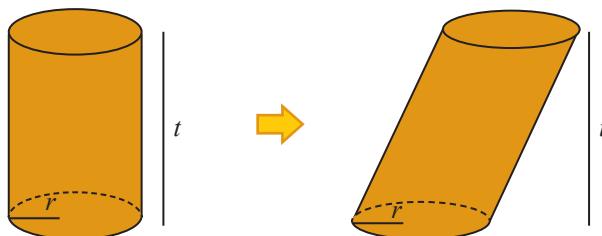
4. **Tantangan**. Gambar di samping merupakan suatu magnet silinder. Alas dari magnet tersebut dibentuk dari dua lingkaran yang sepusat. Lingkaran yang lebih kecil memiliki jari-jari r_1 = 4 cm, sedangkan lingkaran yang lebih besar memiliki jari-jari r_2 = 6 cm. Tinggi dari magnet adalah t = 10 cm.

   Tentukan: a. Luas permukaan magnet.

   b. Volume magnet.

5. **Irisan Tabung**. Misalkan terdapat suatu tabung dengan jari-jari r cm dan panjang t cm. Kemudian tabung tersebut dijadikan irisan tabung dengan memotong tabung tersebut menjadi dua bagian yang sama persis dari atas ke bawah. Tentukan rumus untuk menghitung luas irisan tabung tersebut.

6. **Tandon Bocor**. Terdapat suatu tandon yang berbentuk tabung dengan jari-jari 50 cm tinggi 2 m. Tandon tersebut berisi air sebanyak ¾ dari volume total. Terdapat lubang kecil di dasar tandon tersebut yang menyebabkan air mengalir keluar dengan kecepatan 50 cm^3/detik. Air pada tandon tersebut akan habis setelah ... detik? (anggap π = 3,14).

7. Pondasi rumah. Alas dari pondasi rumah pak Ahmad berbentuk seperti gambar di samping. Jika tinggi pondasi adalah 2 m maka:

   a. tentukan luas permukaan pondasi,

   b. tentukan volume pondasi.

8. **Analisis Kesalahan**. Rudi menghitung volume tabung dengan diameter 5 cm dan tinggi 12 cm. Rudi menghitung

$$V = (12)^2\ (5) = 720$$

   Sehingga diperoleh volume tabung adalah 720 cm^3. Tentukan kesalahan yang dilakukan Budi.

9. **Tabung miring**. Pada gambar di bawah terdapat dua buah bangun sisi lengkung. Sebelah kiri merupakan tabung dengan jari-jari r dan tinggi t. Sebelah kanan merupakan bangun ruang sisi lengkung yang diperoleh dari tabung sebelah kiri dengan menggeser tutup ke sebelah kanan, selanjutnya disebut dengan ***tabung miring***. Tabung miring tersebut memiliki jari-jari r dan tinggi t.

   a. Tentukan suatu metode untuk mendapatkan rumus dari volume tabung miring tersebut.

   b. Apakah volume rumus tabung miring sama dengan volume tabung? Jelaskan analisismu.

10. **Kaleng susu**. Suatu perusahaan susu memiliki kotak susu ukuran 40 cm × 60 cm × 20 cm. Kapasitas maksimal kotak tersebut adalah 48 kaleng susu. Jari-jari kaleng susu adalah r cm dan tingginya t cm. Perusahaan tersebut membuat peraturan:

    i. Nilai r dan t harus bilangan bulat.

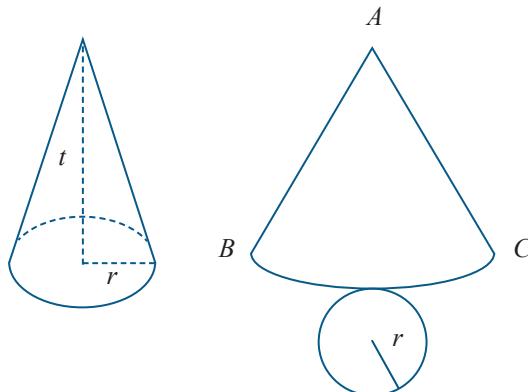
    ii. Luas permukaan kaleng tersebut harus seminimal mungkin.

    Tentukan nilai r dan t.

5.2 Kerucut

Pertanyaan Penting

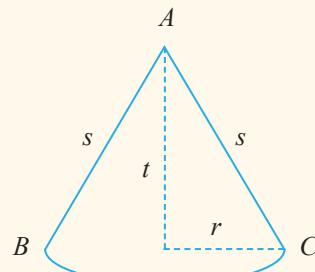
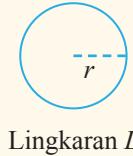
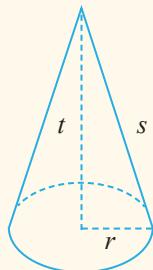
Tahukah kamu rumus untuk menghitung luas permukaan dan volume kerucut?

Kerjakan beberapa kegiatan berikut agar kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan di atas.

Kegiatan 1 Membuat Jaring-Jaring Kerucut

Siapkan beberapa alat berikut:

1. Topi berbentuk kerucut.
2. Alat tulis dan spidol merah.
3. Penggaris.
4. Gunting.
5. Kertas karton.

Langkah-langkah dalam Kegiatan 1.

1. Buat garis lurus vertikal dari titik puncak dengan menggunakan spidol merah.
2. Dengan menggunakan gunting, potong topi sesuai garis merah.
3. Dari Langkah 2, diperoleh bangun yang berbentuk juring.
4. Gambarlah/jiplak juring (yang diperoleh dari Langkah 3) pada kertas karton kemudian tandai titik puncak dengan huruf *A*, titik-titik ujung busurnya dengan titik *B* dan *C*.
5. Panjang busur $\widehat{BC}$ = keliling alas kerucut. Sehingga dapat diperoleh jari-jari kerucut, yaitu $r = \widehat{BC}/2\pi$.
6. Gambarlah lingkaran dengan jari-jari yang diperoleh dari Langkah 5. Lingkaran tersebut menyinggung busur $\widehat{BC}$.
7. Gunting gambar yang diperoleh dari Langkah 6. Apakah dari gambar yang telah digunting kamu dapat membuat kerucut?

Gambar 5.2 Kerucut dan jaring–jaring kerucut

Unsur-unsur dari kerucut.

- Daerah lingkaran L merupakan alas kerucut.
- Juring ABC merupakan selimut kerucut.
- Titik A merupakan titik puncak kerucut.
- r merupakan jari-jari kerucut.
- t merupakan tinggi kerucut.
- Panjang busur BC sama dengan keliling lingkaran dengan jari-jari r.
- AB dan AC disebut garis lukis kerucut.
- $AB = AC = s$, dimana $s^2 = r^2 + t^2$ (ingat Teorema Phytagoras).

Dari pengamatanmu terhadap unsur-unsur kerucut buatlah beberapa pertanyaan.

Contoh:

1. Apakah jari-jari kerucut selalu lebih pendek daripada tinggi kerucut?
2. Bagaimana bentuk selimut kerucut?

Kamu sudah mengetahui jaring-jaring kerucut melalui Kegiatan 1. Diskusikan pertanyaan berikut bersama teman sebangkumu.

1. Apakah untuk menghitung luas permukaan permukaan tabung dapat melalui menghitung luas jaring-jaring kerucut?
2. Bagaimana caranya menghitung luas jaring-jaring kerucut?

Sama seperti menghitung luas permukaan tabung, untuk menghitung luas permukaan kerucut dapat dilakukan dengan menghitung luas dari jaring-jaring kerucut. Jaring–jaring kerucut terdiri atas sebuah lingkaran dan sebuah juring (lihat Gambar 5.2). Maka luas permukaan kerucut adalah luas lingkaran *L* ditambah dengan luas juring *ABC*.

Kamu pasti sudah bisa menghitung luas lingkaran *L* karena jari-jarinya sudah diketahui, namun bagaimana menghitung luas juring *ABC* jika yang diketahui adalah panjang busur $\widehat{BC}$ dan panjang *AB*? Kerjakan Kegiatan 2 untuk mendapatkan luas juring *ABC* pada jaring-jaring kerucut.

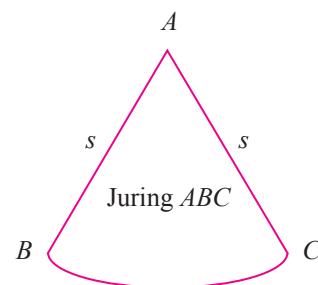
Kegiatan 2 Menentukan Luas Selimut Kerucut

Kerjakan kegiatan ini secara individu.

Perhatikan gambar di samping. Diketahui panjang *AB* = panjang *AC* = *s*, serta panjang $\widehat{BC} = 2\pi r$. Ingat bahwa juring *ABC* merupakan bagian dari lingkaran dengan jari-jari *s*. Kita beri nama dengan lingkaran *S*.

1. Ingatkah kamu mengenai perbandingan antara luas juring dengan luas lingkaran?

   Jika diketahui $m\angle BAC$ maka

$$\frac{\text{Luas Juring } ABC}{\text{Luas Lingkaran } S} = \frac{m\angle ABC}{...}$$

   Namun sudut $m\angle BAC$ tidak diketahui, maka diperlukan analisis lebih lanjut.

2. Ingatkah kamu mengenai perbandingan antara panjang busur dengan keliling lingkaran?

$$\frac{\widehat{BC}}{\text{Keliling Lingkaran } S} = \frac{m\angle ABC}{...}$$

   Namun diketahui $\widehat{BC} = 2\pi r$, sehingga

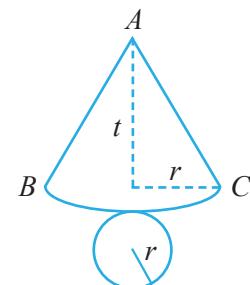
$$\frac{2\pi r}{\text{Keliling Lingkaran } S} = \frac{m\angle ABC}{...}$$

3. Dari hasil (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{\textit{Luas Juring ABC}}{\textit{Luas}\text{ Lingkaran } S} = \frac{2\pi r}{\text{Keliling Lingkaran } S}$$

Sehingga,

$$\text{Luas Juring } ABC = \frac{2\pi r}{\text{Keliling Lingkaran } S} \times \text{Luas Lingkaran } S$$

Dengan mensubstitusi luas lingkaran $S = \pi s^2$ dan keliling lingkaran $S = 2\pi s$, diperoleh

$$\text{Luas Juring ABC} = \frac{2\pi r}{2\pi s} \times \pi s^2$$
$$= \ldots$$

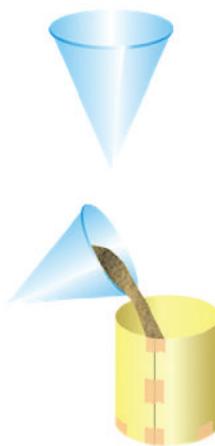
Ayo Kita Simpulkan

Gambar di samping merupakan jaring-jaring kerucut dengan jari-jari r dan tinggi t. Karena luas permukaan kerucut ekuivalen dengan luas jaring-jaring kerucut maka:

Luas Permukaan Kerucut = Luas Lingkaran L + Luas Juring ABC

= ... + ...

= ...

Kegiatan 3 Menentukan Volume Kerucut Melalui Eksperimen

Kerjakan kegiatan ini secara kelompok.

Siapkan beberapa alat berikut:

1. Kertas karton
2. Gunting
3. Beras atau pasir
4. *Double tape*

Langkah-langkah dari Kegiatan 3 adalah sebagai berikut.

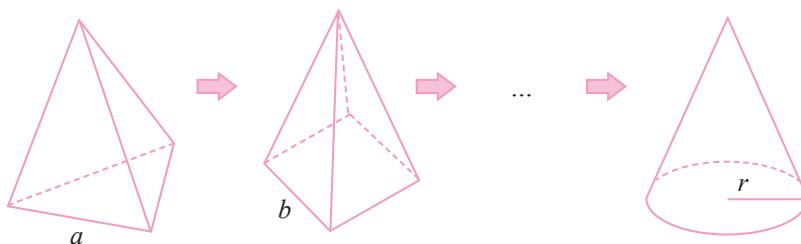
a. Buatlah kerucut tanpa tutup dengan jari-jari dan tinggi sesuka kamu. Kemudian buatlah tabung tanpa tutup dengan jari-jari dan tinggi yang sama dengan jari-jari dan tinggi kerucut tersebut.

b. Isi kerucut dengan beras atau pasir sampai penuh kemudian pindahkan semuanya ke tabung. Ulangi langkah ini sampai tabung terisi penuh.

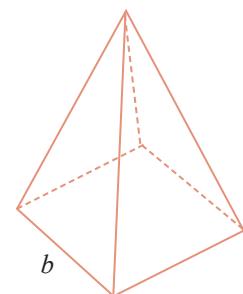
c. Berapa kali kamu mengisi tabung sampai penuh dengan menggunakan kerucut?

d. Gunakan hasil d untuk menentukan hubungan antara volume tabung dan volume kerucut.

e. Tentukan perbandingan volume kerucut dengan volume tabung.

f. Dari jawaban butir e, dapat disimpulkan

$$\text{Volume kerucut} = \frac{\dots}{\dots}\ \text{Volume tabung}$$

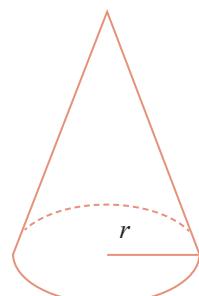
Kegiatan 4 **Membandingkan Kerucut dengan Limas**

Pada gambar di bawah ini terdapat limas segitiga, limas segi empat dan kerucut dengan tinggi yang sama.

a. Menurut kamu apakah kesamaan antara limas segitiga, limas segi empat dan kerucut?

b. Tentukan rumus volume limas segi empat

Limas di samping memiliki alas segi empat dengan panjang sisi b serta tinggi t.

Volume limas = ...

= ...

c. Dari hasil (a) dan (b) kamu dapat menentukan rumus volume kerucut.

Limas di samping memiliki alas lingkaran dengan jari-jari r serta tinggi t.

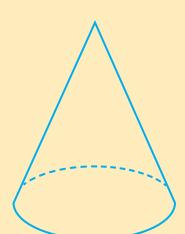
Volume kerucut = ...

= ...

Ayo Kita Simpulkan

a. **Gunakan kalimatmu sendiri**. Bagaimana caramu menentukan volume kerucut?

b. Dari Kegiatan 3 dan 4 diperoleh bahwa rumus volume kerucut dengan jari-jari dan tinggi t adalah

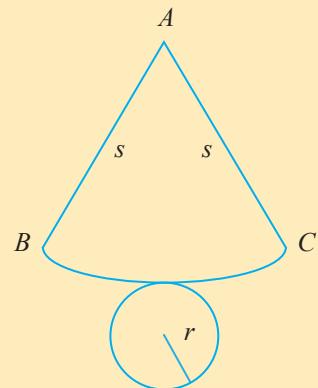
$$V = ...$$

Materi Esensi 5.2 Kerucut

Definisi:

Kerucut adalah bangun ruang sisi lengkung yang dapat dibentuk dari tabung dengan mengubah tutup tabung menjadi titik. Titik tersebut biasanya disebut dengan titik puncak. Kerucut memiliki dua sisi, yaitu satu sisi datar dan satu sisi lengkung. Kerucut merupakan limas dengan alas lingkaran.

Benda-benda dalam kehidupan sehari-hari yang menyerupai kerucut adalah topi ulang tahun, topi petani, dan *cone* es krim.

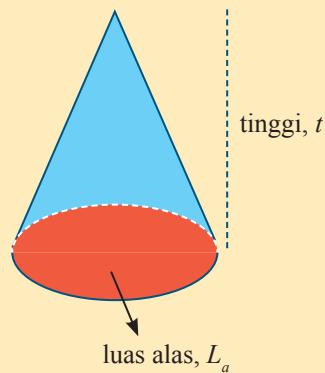
Luas Permukaan Kerucut:

Luas permukaan ekuivalen dengan jumlahan semua luas bangun penyusun dari jaring-jaring kerucut. Jaring-jaring kerucut terdiri atas satu lingkaran dan satu selimut yang berbentuk juring.

Misalkan terdapat tabung dengan jari jari r dan tinggi t, maka:

L = Luas Lingkaran + Luas Juring ABC

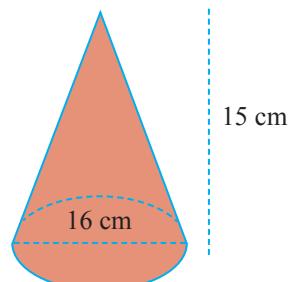
$= \pi r^2 + \pi rs$

$= \pi r(r + s)$

$= \pi r(r + \sqrt{r^2 + t^2})$ dengan $s = \sqrt{r^2 + t^2}$

Volume Kerucut:

Volume kerucut adalah $\frac{1}{3}$ bagian dari volume tabung dengan jari-jari dan tinggi yang sama atau dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$V = \frac{1}{3} L_a \times t$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 \times t$$

Contoh 1 **Menghitung Luas Permukaan Kerucut**

Hitung luas permukaan kerucut di samping.

Diameter kerucut adalah 16 cm, maka jari-jari kerucut adalah r = 8 cm, sedangkan tinggi kerucut adalah t =15 cm. Panjang garis lukis adalah

$$s = \sqrt{r^2 + t^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

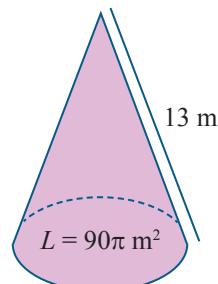
Sehingga diperoleh

$L = \pi r(r + s)$ rumus luas permukaan tabung

$= \pi(8)(8 + 17)$ substitusi nilai r dan t

$= 200\pi$

Jadi, luas permukaan kerucut adalah 200π cm^2.

Contoh 2 Menghitung Jari-Jari Kerucut Jika Diketahui Luas

Hitung jari-jari kerucut di samping.

Panjang garis lukis adalah $s = 12$ m dan luas permukaan kerucut adalah $L = 90\pi$ m^2.

$L = \pi r(r + s)$ rumus luas permukaan tabung

$90\pi = \pi r(r + 13)$ substitusi nila L dan s

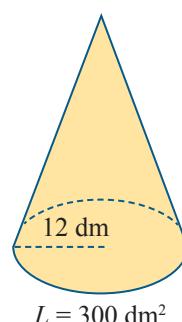
$90 = r(r + 13)$ kedua ruas dibagi dengan π

Perhatikan tabel di bawah.

$90 = 1 \times 90 = \mathbf{5} \times \mathbf{18}$

$= 2 \times 45 = 6 \times 15$

$= 3 \times 30 = 9 \times 10$

Diperoleh $r = 5$, sehingga jari-jari kerucut adalah 5 m.

Contoh 3 Menghitung Tinggi Kerucut Jika Diketahui Luas

Hitung tinggi kerucut di samping.

Jari-jari kerucut adalah $r = 12$ dm dan luasnya adalah $L = 300$ dm^2.

$L = \pi r(r + s)$ rumus luas permukaan tabung

$300\pi = \pi(12)(12 + s)$ substitusi nila L dan r

$25 = (12 + s)$ kedua ruas dibagi dengan 12π

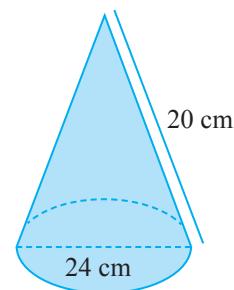
$13 = s$

Kemudian berdasarkan teorema phytagoras

$$t = \sqrt{s^2 - r} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$$

Diperoleh $t = 5$, sehingga tinggi kerucut adalah 5 dm.

Contoh 4 Menghitung Volume Kerucut

Hitung volume kerucut di samping.

20 cm

24 cm

Diameter kerucut adalah 24 cm, maka jari-jari kerucut adalah r = 12 cm. Sedangkan panjang garis lukis adalah s = 20 cm, maka

$$t = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

Sehingga volumenya adalah

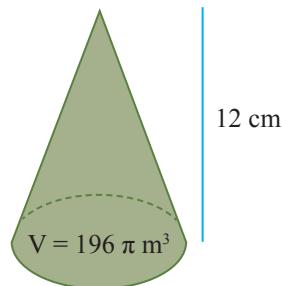
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$ rumus luas permukaan tabung

$= \frac{1}{3}\pi(12)^2 \times 16$ substitusi nilai r dan t

$= 768\pi$

Volume dari kerucut adalah 768π m^3.

Contoh 5 Menghitung Jari-Jari Kerucut Jika Diketahui Volume

Hitung jari-jari kerucut di samping.

Tinggi kerucut adalah t = 12 m dan volumenya adalah $V = 196\pi$ m^3.

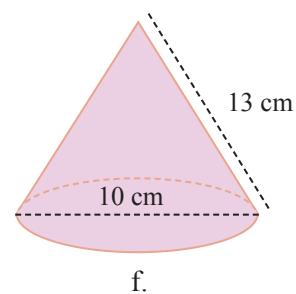
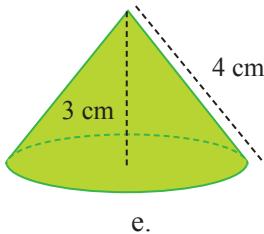
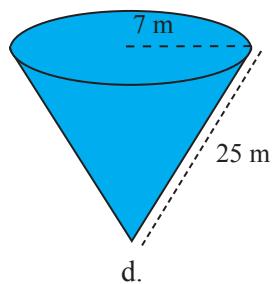
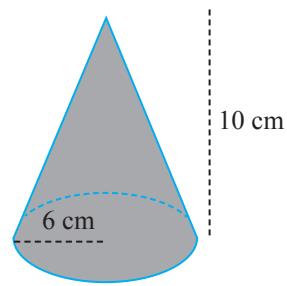
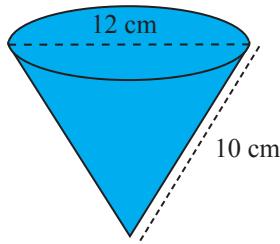
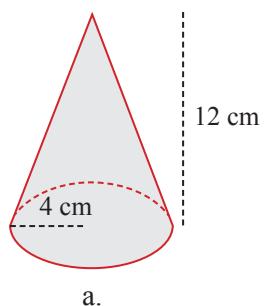
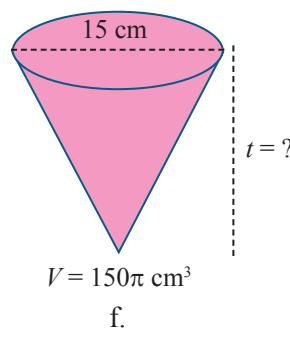
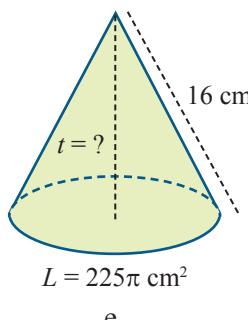
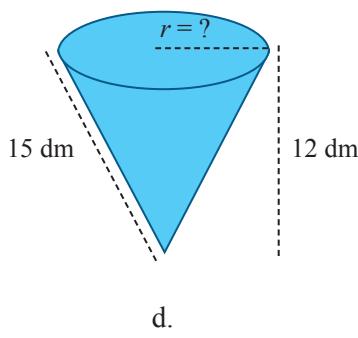
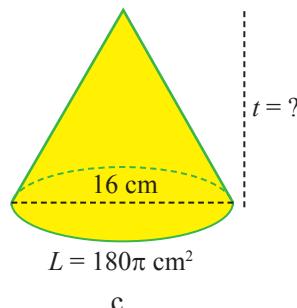
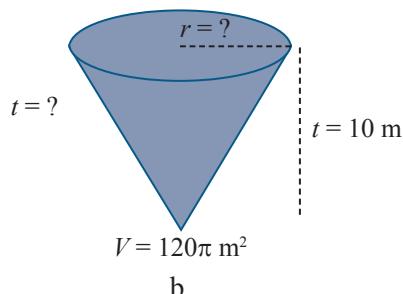
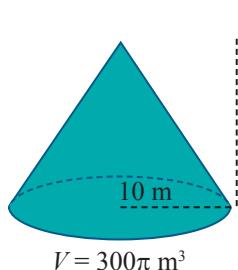
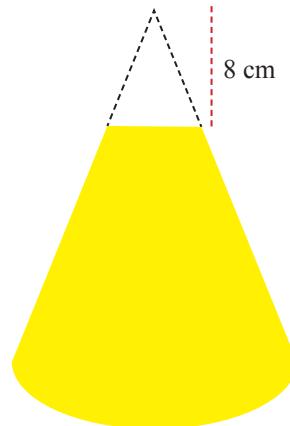
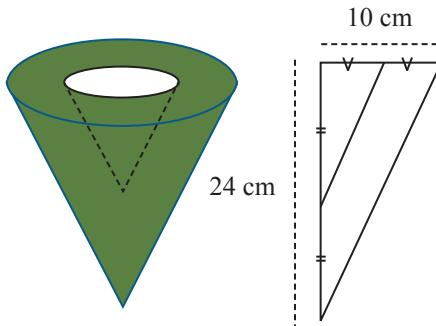
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$ rumus luas permukaan kerucut

$196\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \times 12$ substitusi nilai r dan t

$196\pi = 4\pi r^2$

$49 = r^2$ kedua ruas dibagi dengan 4π

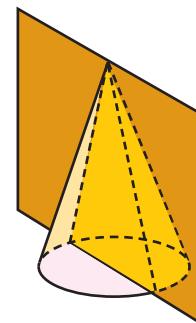
$7 = r$

Jari-jari kerucut adalah 7 m.

1. Perhatikan kembali soal pada Contoh 1. Jika jari-jari dijadikan menjadi ½ kali lipat dan tinggi dijadikan dua kali lipat, berapakah luas permukaan kerucut? Apakah luas permukaannya semakin besar?
2. Perhatikan kembali soal pada Contoh 4.
   a. Jika jari-jari dijadikan menjadi dua kali lipat dan tinggi dijadikan ½ kali lipat, berapakah volume kerucut?
   b. Jika jari-jari dijadikan menjadi ½ kali lipat dan tinggi dijadikan dua kali lipat, berapakah volume kerucut?
   c. Dari soal 2.a, 2.b apakah terjadi perubahan volume kerucut? Jelaskan analisismu.

1. Tentukan luas permukaan dan volume dari bangun kerucut berikut.

2. Tentukan panjang dari unsur kerucut yang ditanyakan.

3. **Tumpeng**. Pada suatu hari Pak Budi melakukan syukuran rumah baru. Pak Budi memesan suatu tumpeng. Tumpeng tersebut memiliki diameter 36 cm dan tinggi 24 cm. Namun, diawal acara Pak Budi memotong bagian atas tumpeng tersebut secara mendatar setinggi 8 cm.

   Berapakah luas permukaan dan volume dari tumpeng yang tersisa?

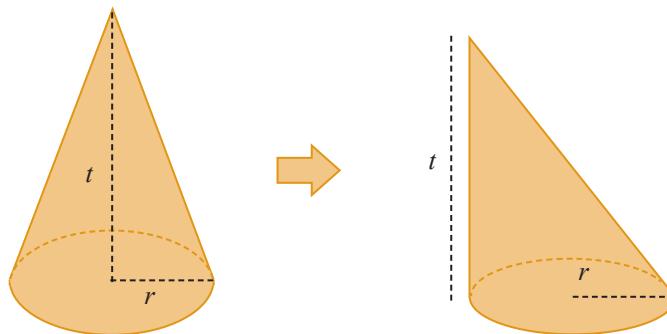
4. Suatu kerucut memiliki jari-jari 6 cm dan tinggi t cm. Jika luas permukaan kerucut adalah A cm^2 dan volume kerucut adalah A cm^3 maka tentukan:

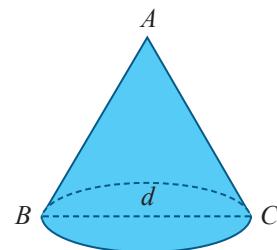
   a. Nilai dari t.

   b. Nilai dari A.

5. Terdapat suatu bangun ruang yang diperoleh dari dua kerucut yang sepusat. Kerucut yang lebih besar memiliki jari-jari 10 cm dan tinggi 24 cm. Jari-jari kerucut kecil adalah ½ jari-jari kerucut besar. Tinggi kerucut kecil adalah ½ tinggi kerucut besar (lihat gambar di bawah)

Tentukan: a. luas permukaan,

b. volume.

6. **Irisan Kerucut**. Misalkan terdapat suatu kerucut dengan dengan jari-jari r cm dan panjang t cm. Kemudian kerucut tersebut dijadikan irisan kerucut dengan memotong kerucut tersebut menjadi dua bagian dari atas ke bawah (lihat gambar di samping). Tentukan rumus untuk menghitung luas irisan kerucut tersebut.

7. **Analisis Kesalahan**. Budi menghitung volume kerucut dengan diameter 10 cm dan tinggi 12 cm. Budi menghitung

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}(12)^2\,(10) = 480}$$

Sehingga diperoleh volume kerucut adalah 480 cm^3. Tentukan kesalahan yang dilakukan Budi.

8. Dari kertas karton ukuran 1 m × 1 m Lisa akan membuat jaring-jaring kerucut dengan jari-jari r cm dan tinggi t cm.

   a. Apakah Lisa bisa membuat jaring-jaring tersebut jika r = 40 cm dan t = 30 cm? Kemukakan alasanmu.

   b. Apakah Lisa bisa membuat jaring-jaring tersebut jika r = 30 cm dan t = 40 cm? Kemukakan alasanmu.

9. **Kerucut miring**. Pada gambar di bawah terdapat dua buah bangun sisi lengkung. Gambar sebelah kiri merupakan kerucut dengan jari-jari r dan tinggi t. Gambar sebelah kanan merupakan bangun ruang sisi lengkung yang diperoleh dari kerucut sebelah kiri dengan menggeser alasnya ke sebelah kanan, selanjutnya disebut dengan ***kerucut miring***. Kerucut miring tersebut memiliki jari-jari r dan tinggi t.

   a. Tentukan suatu metode untuk mendapatkan rumus dari volume kerucut miring tersebut.

   b. Apakah volume rumus kerucut miring sama dengan volume kerucut? Jelaskan analisismu.

10. Perhatikan kerucut di samping. Jika segitiga ABC merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi d cm, tentukan luas permukaan dan volume kerucut.

5.3 Bola

Tahukah kamu cara untuk mendapatkan rumus luas permukaan dan volume bola?

Kerjakan beberapa kegiatan berikut agar kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan di atas.

Kegiatan 1 Menentukan Luas Bola Melalui Eksperimen

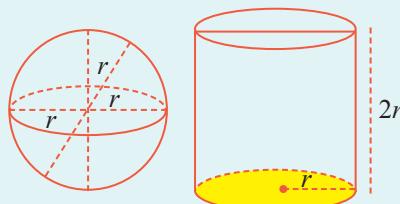
Kerjakan kegiatan ini secara kelompok sebanyak 3 sampai 5 siswa. Benda atau alat yang perlu disiapkan:

1. Bola plastik ukuran kecil sebanyak tiga
2. Gunting
3. Benang
4. Pensil dan penggaris
5. Kertas karton
6. Lem

Langkah-langkah dari kegiatan ini adalah sebagai berikut.

1. Ambil salah satu bola. Dengan menggunakan penggaris dan benang, hitunglah keliling bola yang kamu siapkan. Dari keliling, dapat diperoleh jari-jari bola.
2. Buatlah beberapa lingkaran di karton dengan jari-jari yang kamu peroleh dari Langkah 1.
3. Guntinglah semua lingkaran yang sudah dibuat.
4. Guntinglah bola yang sudah disiapkan dan jadikan menjadi potongan kecil-kecil.
5. Ambil salah satu lingkaran dan tempelkan dengan menggunakan lem potongan-potongan bola pada lingkaran. (Usahakan potongan-potongan bola tidak saling tindih). Jika sudah penuh, ambil lingkaran yang lain, lalu tempelkan potongan-potongan bola pada lingkaran kedua. Ulangi terus sampai potongan-potongan bola sudah habis.
6. Dari Langkah 5, dapat disimpulkan bahwa luas permukaan bola sama dengan ... kali luas lingkaran dengan jari-jari yang sama.
7. Untuk lebih meyakinkan, ulangi Langkah 1 sampai dengan Langkah 6 dengan menggunakan bola kedua dan ketiga.

Kegiatan 2 Mendapatkan Rumus Luas Permukaan Bola

Diskusi

Diskusikan dengan teman sebangkumu beberapa pertanyaan berikut.

a. Apakah bola memiliki jaring-jaring?
b. Bagaimana cara menentukan luas permukaan bola?

Kemudian baca dan pahami informasi di bawah ini.

Tahukah Kamu?

Dalam karyanya yang berjudul *"On Spheres and Cylinder"*, Archimedes menyatakan bahwa "Sebarang tabung yang memiliki jari-jari yang sama dengan jari-jari bola dan tingginya sama dengan diameter bola, maka luas permukaan tabung sama dengan 3/2 kali luas permukaan bola."

Dengan kata lain, perbandingan luas permukaan bola yang memiliki jari-jari r dengan luas permukaan tabung yang memiliki jari-jari r dan tinggi $2r$ adalah 2 : 3.

Selanjutnya jawab pertanyaan di bawah ini.

c. Bagaimana cara menentukan luas permukaan bola berdasarkan informasi di atas?

Pada kegiatan ini kamu akan mendapatkan rumus menghitung luas bola dengan menggunakan perbandingan dengan luas tabung.

Terdapat dua bangun:

a. Tabung dengan jari-jari r dan tinggi $2r$.
b. Bola dengan jari-jari r.

Sekarang ikuti langkah-langkah berikut.

1. Hitung luas tabung. Kamu pasti masih ingat rumus untuk menghitung luas tabung. Tuliskan hasilnya di bawah ini.

$$L_{\text{tabung}} = \ldots$$

2. Selanjutnya berdasarkan pernyataan Archimedes, kamu bisa mendapatkan rumus untuk menghitung luas bola.

$$L_{\text{bola}} = \frac{2}{3} \times L_{\text{tabung}}$$
$$= \ldots$$
$$= \ldots$$

Kegiatan 3 — Menentukan Volume Bola Melalui Eksperimen

Kerjakan kegiatan ini secara kelompok. Siapkan bola plastik, alat tulis, penggaris, kertas karton, *cutter*, dan pasir.

a. Ukur keliling bola, lalu hitunglah panjang jari-jarinya.

b. Buatlah dua tabung terbuka dari kertas karton yang telah disiapkan. Jari-jari tabung terbuka sama dengan jari-jari bola plastik, sedangkan tinggi tabung terbuka sama dengan diameter bola plastik.

c. Lubangi bola plastik dengan menggunakan *cutter*.

d. Isi bola plastik yang sudah berlubang dengan pasir sampai penuh.

e. Kemudian pindahkan semua pasir pada bola ke tabung terbuka. Ulangi langkah ini sampai kedua tabung terisi penuh.

f. Berapa kali kamu mengisi dua tabung sampai penuh dengan menggunakan bola?

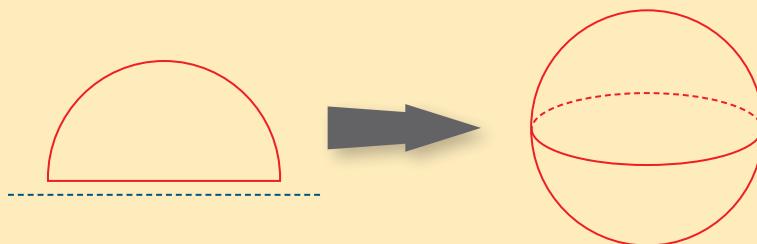
g. Gunakan hasil (f) untuk menentukan perbandingan volume bola dengan volume tabung.

Kegiatan 4 — Mendapatkan Rumus Volume Bola

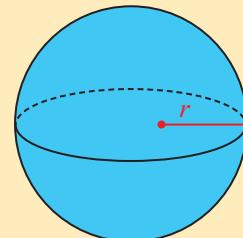
Kerjakan kegiatan ini secara individual. Tabung pada Kegiatan 3 memiliki jari-jari r dan tinggi $2r$. Hitung volume dari tabung tersebut dan gunakan hasil dari Kegiatan 3 untuk menentukan rumus menghitung volume bola.

$$V_{\text{bola}} = \frac{\cdots}{\cdots} V_{\text{tabung}}$$

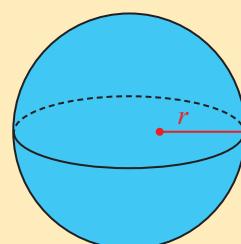
$$= \ldots$$

$$= \ldots$$

Materi Esensi 5.3 Bola

Definisi Bola:

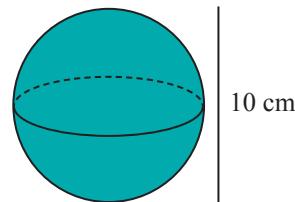
Bola adalah bangun ruang sisi lengkung yang dibentuk dari tak hingga lingkaran yang memiliki jari-jari sama panjang dan berpusat pada titik yang sama. Bola hanya memiliki satu sisi yang merupakan sisi lengkung. Bola dapat dibentuk dengan memutar/merotasi setengah lingkaran sebesar 360° dengan diameter sebagai sumbu rotasi.

Benda dalam kehidupan sehari-hari yang berbentuk bola adalah bola olah raga (sepak bola, basket, voli dan lain-lain), kelereng, globe, dan lainnya.

Luas Permukaan Bola:

Luas permukaan bola adalah sama dengan 4 kali luas lingkaran yang memiliki jari-jari yang sama atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$L = 4\pi r^2$$

Volume Bola:

Volume bola adalah hasil kali $\frac{4}{3}\pi$ dengan pangkat tiga jari-jari bola tersebut atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Contoh 1 — Menghitung Luas Permukaan Bola

Hitung luas bola di samping.

Alternaif Penyelesaian:

Diameter bola di samping adalah 10 cm, maka jari-jarinya adalah r = 5 cm.

$L = 4\pi r^2$	rumus luas permukaan bola
$= 4\pi(5)^2$	substitusi nilai r
$= 100\pi$	

Jadi, luas bola adalah 100π cm^2.

Contoh 2 — Menghitung Jari-Jari Bola Jika Diketahui Luas

Hitung jari-jari bola di samping.

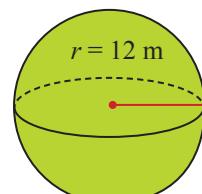
$L = 441$ m^2

Alternaif Penyelesaian:

Luas permukaan bola di samping adalah $L = 441$ m^2.

$L = 4\pi r^2$	rumus luas permukaan bola
$441\pi = 4\pi r^2$	substitusi nilai L
$441 = 4r^2$	kedua ruas dibagi dengan π
$21 = 2r$	
$\frac{21}{2} = r \rightarrow r = 10,5$	

Jadi, jari-jari bola adalah 10,5 cm.

Contoh 3 — Menghitung Volume Bola

Hitung volume bola di samping.

Alternaif Penyelesaian:

Jari-jari bola di samping adalah r = 12 m.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	rumus volume bola
$= \frac{4}{3}\pi(12)^3$	substitusi nilai r
$= \frac{4}{3}\pi(1.728)$	
$= 2.304\pi$	

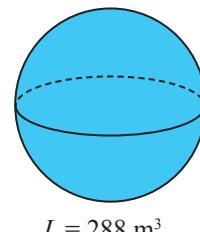
Luas bola adalah 2.304π m^3.

Contoh 4 **Menghitung Jari-Jari Bola Jika Diketahui Volume**

Hitung jari-jari bola di samping.

$L = 288$ m³

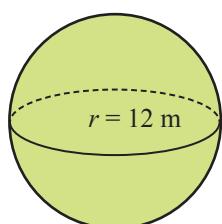
Alternaif Penyelesaian:

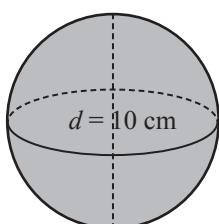
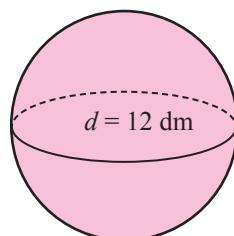
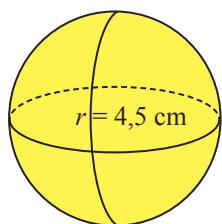
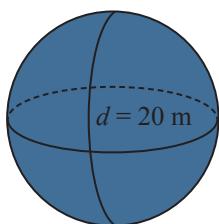
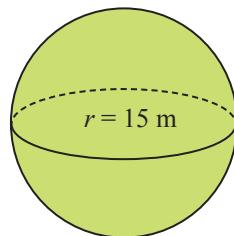
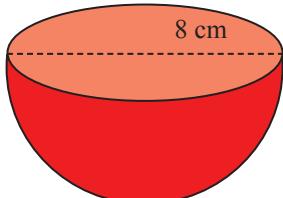
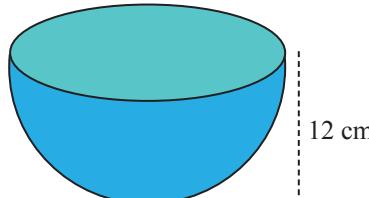
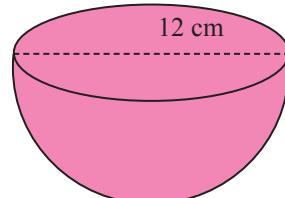
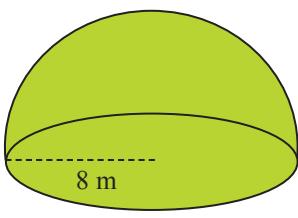
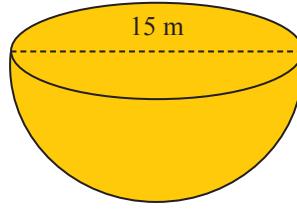
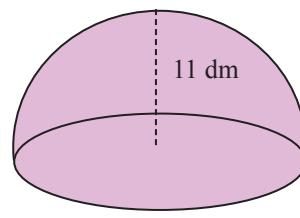
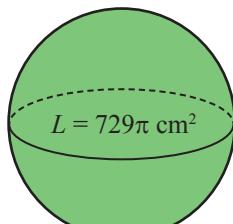
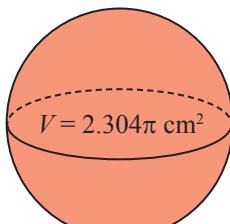
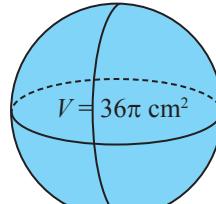
Volume bola di samping adalah $V = 288$ m³

$V \quad = \frac{4}{3}\pi r^3$ rumus volume bola

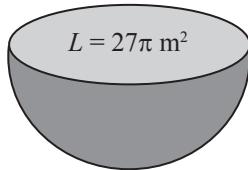
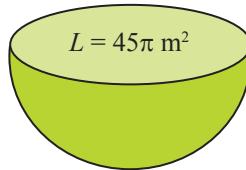
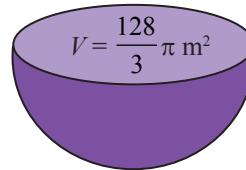
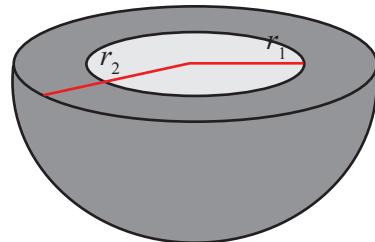
$288\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$ substitusi nilai V

$216 \quad = r^3$ kedua ruas dikali dengan $\frac{3}{4\pi}$

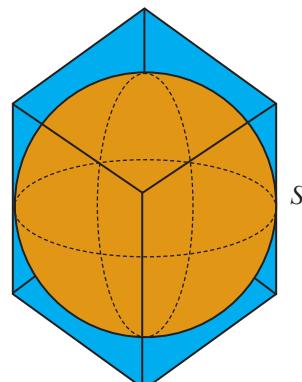
$6 \quad = r$

Jari-jari bola adalah 6 m.

Ayo Kita Tinjau Ulang

1. Perhatikan kembali soal pada Contoh 1. Jika jari-jari diubah menjadi 2 kali lipatnya, berapa kali lipat luasnya? Secara umum, jika jari-jari diubah menjadi a kali lipatnya ($a > 0$), berapa kali lipat luasnya?
2. Perhatikan kembali soal pada Contoh 2. Jika luasnya diubah menjadi 2 kali lipatnya, berapa kali lipat jari-jarinya? Secara umum, jika luasnya diubah menjadi a kali lipatnya ($a > 0$), berapa kali lipat jari-jarinya?
3. Perhatikan kembali soal pada Contoh 3. Jika jari-jari diubah menjadi 2 kali lipatnya, berapa kali lipat volumenya? Secara umum, jika jari-jari diubah menjadi a kali lipatnya ($a > 0$), berapa kali lipat volumenya?
4. Perhatikan kembali soal pada Contoh 4. Jika volumenya diubah menjadi 2 kali lipatnya, berapa kali lipat jari-jarinya? Secara umum, jika volumenya diubah menjadi a kali lipatnya ($a > 0$), berapa kali lipat jari-jarinya?

Latihan 5.3 Bola

1. Tentukan luas permukaan dan volume bangun bola berikut.

2. Berapakah luas permukaan bangun setengah bola tertutup berikut.

3. Dari soal-soal nomor 2 tentukan rumus untuk menghitung luas permukaan setengah bola tertutup.

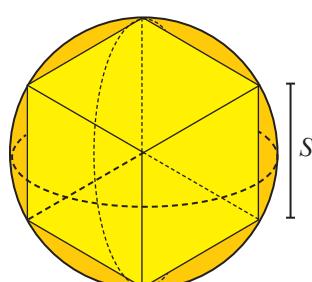
4. Tentukan jari-jari dari bola dan setengah bola tertutup berikut.

5. **Berpikir kritis**.Terdapat suatu bola dengan jari-jari r cm. Jika luas permukaan bola tersebut adalah A cm² dan volume bola tersebut adalah A cm³, tentukan:
   a. nilai r
   b. nilai A

6. Bangun di samping dibentuk dari dua setengah bola yang sepusat. Setengah bola yang lebih kecil memiliki jari-jari r_1 = 4 cm sedangkan yang lebih besar memiliki jari-jari r_2 = 8 cm.

   Tentukan:
   a. luas permukaan bangun tersebut,
   b. volume bangun tersebut.

7. **Analisis kesalahan**. Lia menghitung luas permukaan bola dengan cara membagi volume bola dengan jari-jari bola tersebut ($L = \frac{V}{r}$). Tentukan kesalahan yang dilakukan oleh Lia.

8. **Bola di dalam kubus**. Terdapat suatu kubus dengan panjang sisi s cm. Dalam kubus tersebut terdapat bola dengan kondisi semua sisi kubus menyentuh bola (lihat gambar di samping).

   a. Tentukan luas permukaan bola tersebut.

   b. Tentukan volume bola tersebut.

   Petunjuk: tentukan jari-jari bola terlebih dahulu.

9. **Kubus di dalam bola**. Terdapat suatu kubus dengan panjang sisi s cm. Kubus tersebut berada di dalam bola dengan kondisi semua titik sudut kubus menyentuh bola.

   a. Tentukan luas permukaan bola tersebut

   b. Tentukan volume bola tersebut

   Petunjuk: tentukan jari-jari bola terlebih dahulu.

10. **Timbangan dan kelereng**. Andi punya dua macam kelereng. Kelereng tipe I berjari-jari 2 cm sedangkan tipe II berjari-jari 4 cm. Andi melakukan eksperimen dengan menggunakan timbangan. Timbangan sisi kiri diisi dengan kelereng tipe I sedangkan sisi kanan diisi dengan kelereng tipe II. Tentukan perbandingan banyaknya kelereng pada sisi kiri dengan banyaknya kelereng pada sisi kanan agar timbangan tersebut seimbang.

Proyek 5

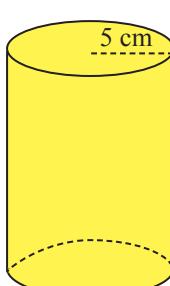
Kerjakan secara kelompok beranggotakan 5 siswa.

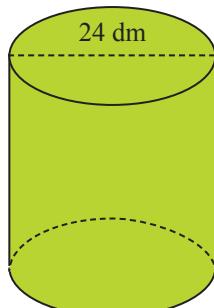
a. Tiap-tiap siswa membawa botol (bisa botol minuman, kecap, dan lain-lain).

b. Isi tiap-tiap botol dengan air dan hitung volumenya.

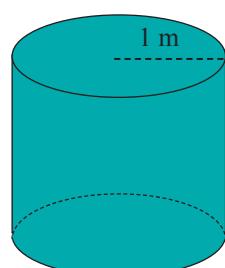
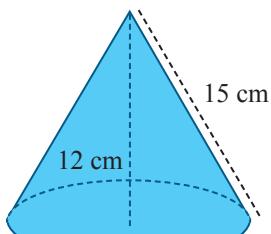
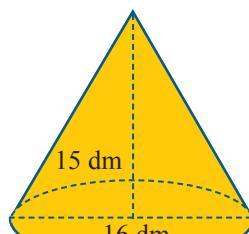
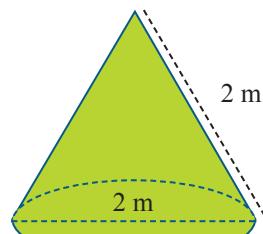
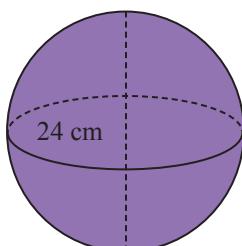
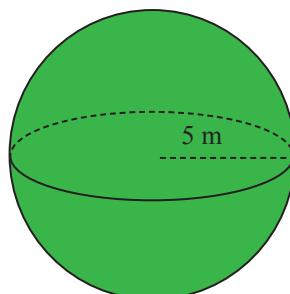
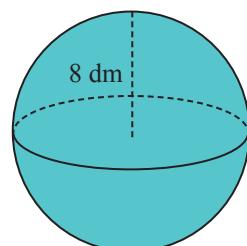
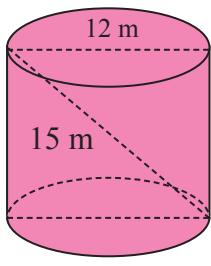
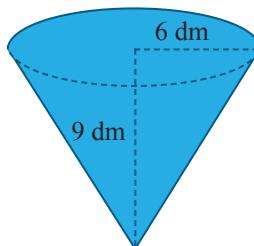
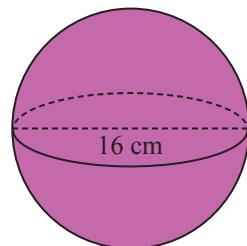
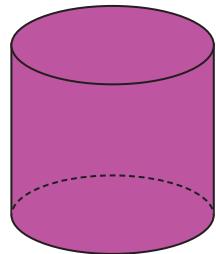
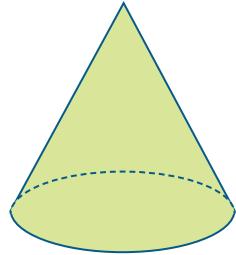
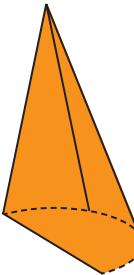
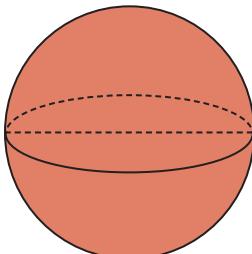
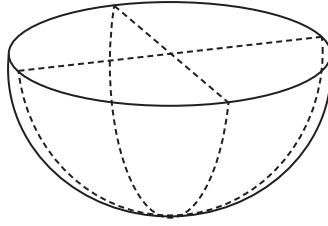
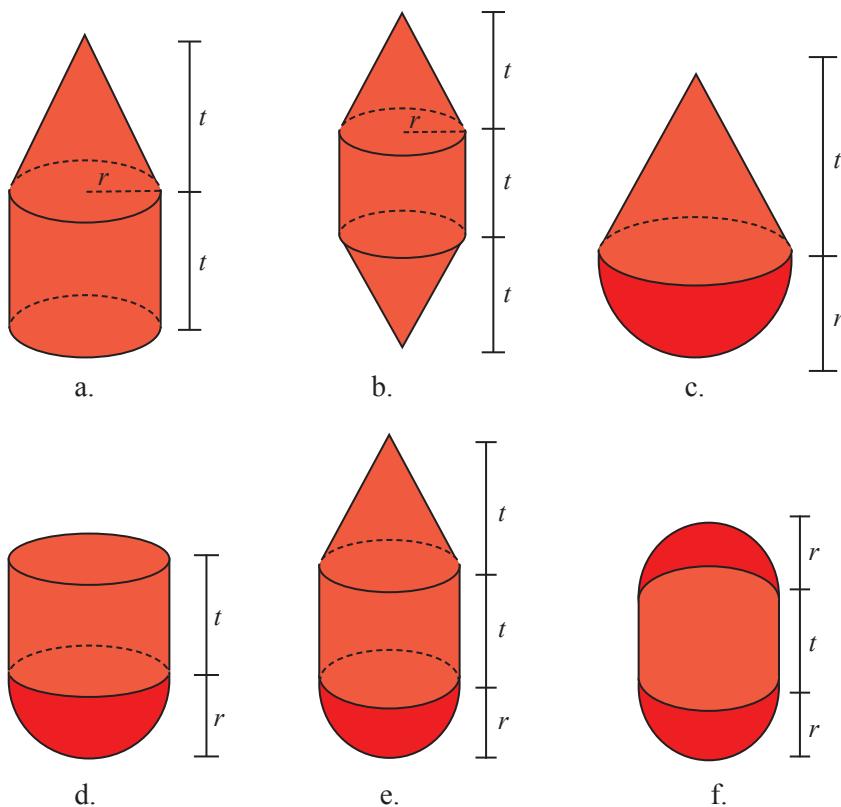
c. Hitung volume tiap-tiap botol (kamu bisa menghitung jari-jari dan tinggi terlebih dahulu).

d. Bandingkan hasil (b) dengan (a) dan isi tabel di bawah ini.

	Volume Asli (V_a)	Volume Hitungan (V_h)	Selisih $\lvert V_a - V_b \rvert$	Persentase*
Botol 1				
Botol 2				
Botol 3				
Botol 4				
Botol 5				

e. Presentasikan hasilnya di depan kelas.

Keterangan: Persentase = $\frac{\text{Selisih}}{V_a} \times 100\%$

Catatan: - Ubah semua satuan menjadi ‘cm’.

- 1 Liter = 1.000 cm^3

Uji Kompetensi 5 Bangun Ruang Sisi Lengkung

Untuk soal 1 - 2 perhatikan gambar-gambar di bawah ini.

1. Tentukan luas permukaan tiap-tiap bangun.
2. Tentukan volume tiap-tiap bangun.

Untuk soal 3 - 6 perhatikan tabel di bawah ini.

Tabung	Setengah Tabung
Luas Permukaan = $2\pi r(r + t)$ Volume = $\pi r^2 t$	Luas Permukaan = ...? Volume = ...?
Kerucut	**Setengah Kerucut**
Luas Permukaan = $\pi r(r + s)$ Volume = $\frac{1}{3}\pi r^2 t$	Luas Permukaan = ...? Volume = ...?
Bola	**Setengah Bola**
Luas Permukaan = $4\pi r^2$ Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$	Luas Permukaan = ...? Volume = ...?

3. Tentukan rumus luas permukaan bangun-bangun pada tabel di atas.

4. Dari jawaban soal nomor 3 bandingkan dengan rumus bangun-bangun pada sebelah kiri.
   a. Apakah luas permukaan bangun sebelah kanan **selalu sama dengan setengah kali** luas permukaan bangun sebelah kiri?
   b. Kesimpulan apa yang dapat kamu peroleh dari jabawan 4a?

5. Tentukan rumus volume bangun-bangun pada tabel di atas.

6. Kemudian bandingkan jawabanmu dengan rumus bangun-bangun pada sebelah kiri.
   a. Apakah volume bangun sebelah kanan **selalu sama dengan setengah kali** volume bangun sebelah kiri?
   b. Kesimpulan apa yang dapat kamu peroleh dari jabawan 6a?

Untuk soal nomor 7 perhatikan bangun-bangun di bawah ini.

7. Tentukan luas permukaan dan volume tiap-tiap bangun.

Untuk Soal nomor 8-11 perhatikan kalimat di bawah ini.

Bernalar. Suatu perusahaan coklat memproduksi tiga macam coklat yang berbentuk tabung, kerucut dan bola. Misalkan jari-jarinya adalah r dan tinggi t. Perusahaan tersebut menginginkan kertas pembungkus coklat tersebut memiliki luas yang sama satu dengan yang lainnya. Misalkan

T = Luas kertas pembungkus coklat bentuk tabung.

K = Luas kertas pembungkus coklat bentuk kerucut.

B = Luas kertas pembungkus coklat bentuk bola.

8. Apakah mungkin $T = K$? Jika ya, tentukan perbandingan $r : t$.

9. Apakah mungkin $T = B$? Jika ya, tentukan perbandingan $r : t$.

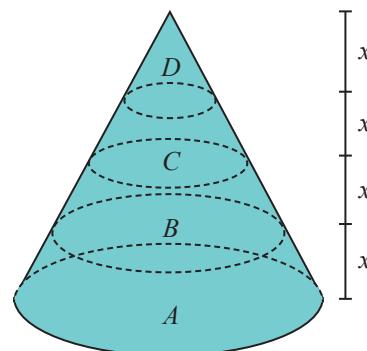
10. Apakah mungkin $K = B$? Jika ya, tentukan perbandingan $r : t$.

11. Apakah mungkin $T = K = B$? Kemukakan alasanmu.

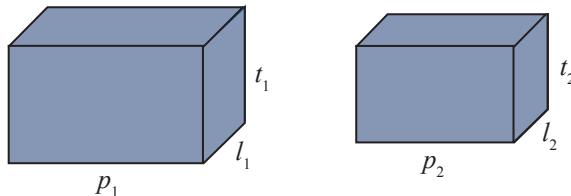
12. Gambar di samping merupakan cokelat berbentuk kerucut yang dibagi menjadi empat bagian, A, B, C dan D. Tinggi tiap-tiap bagian adalah x.

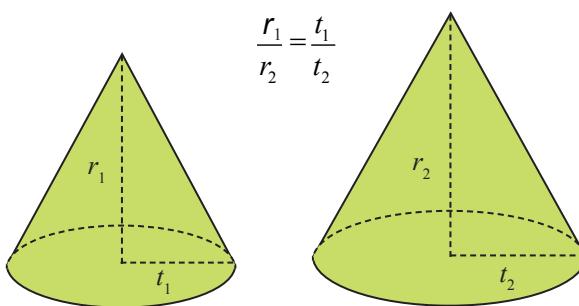
a. Tentukan perbandingan luas permukaan A dengan luas permukaan B.

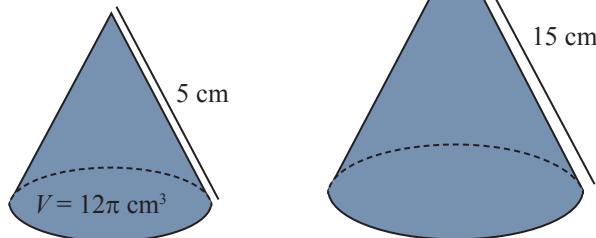
b. Tentukan perbandingan luas permukaan B dengan luas permukaan C.

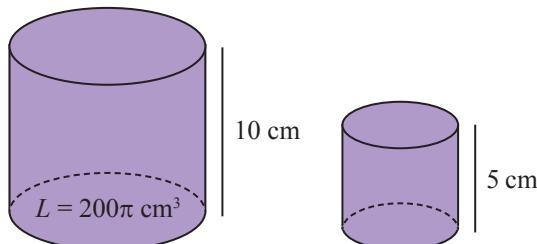
c. Tentukan perbandingan luas permukaan C dengan luas permukaan D.

(**Catatan:** Gunakan prinsip kesebangunan.)

13. Perhatikan kembali gambar pada Soal nomor 12.

a. Tentukan perbandingan volume A dengan volume B.

b. Tentukan perbandingan volume B dengan volume C.

c. Tentukan perbandingan volume C dengan volume D.

Kesebangunan bangun ruang. Dua bangun ruang dikatakan sebangun jika perbandingan panjang setiap parameternya adalah sama. Sebagai contoh, dua balok di bawah adalah sebangun jika memenuhi

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Dua kerucut dikatakan sebangun jika perbandingan jari-jari sama dengan perbandingan tinggi. Begitu juga dengan dua tabung.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Karena bola hanya mempunyai satu parameter, yakni jari-jari, **setiap dua bola adalah sebangun**.

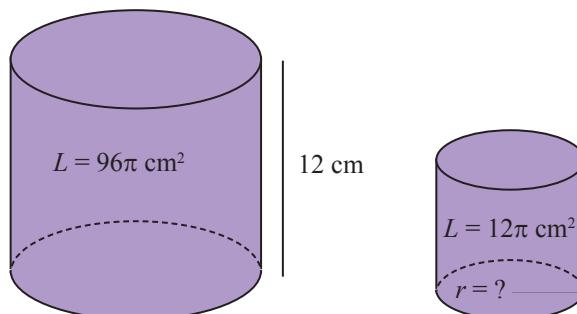
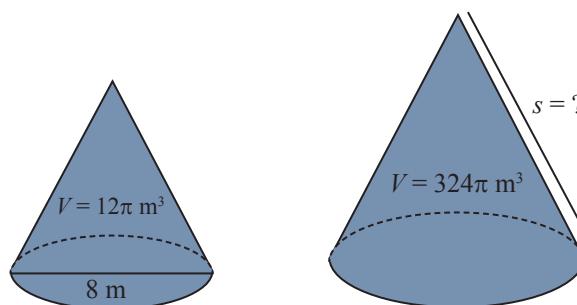
14. Untuk tiap pasangan bangun ruang yang sebangun, hitung volumeyang belum diketahui.

a.

b.

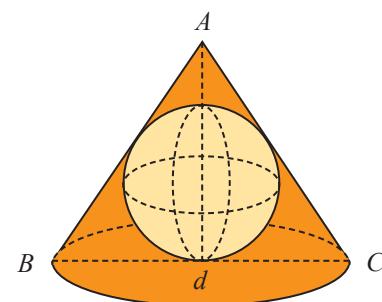
$L = 200\pi$ cm^3

10 cm

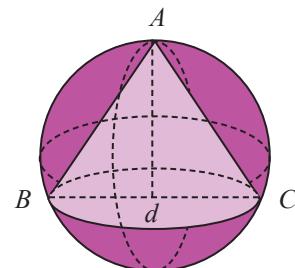
5 cm

c. Dari jawaban 14a dan 14b, kesimpulan apa yang dapat diperoleh?

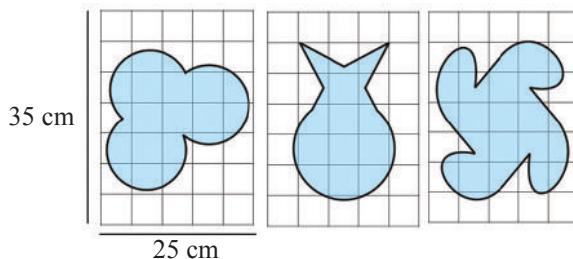
15. Untuk tiap pasangan bangun ruang yang sebangun, hitung panjang yang ditanyakan

a.

b.

c. Dari jawaban 15a dan 15b, kesimpulan apa yang dapat diperoleh?

16. **Bola di dalam kerucut**.

Gambar di samping merupakan suatu kerucut dengan $AB = AC = BC = d$. Dalam kerucut tersebut terdapat suatu bola yang menyinggung selimut dan alas kerucut. Tentukan volume bola tersebut.

Petunjuk: tentukan jari-jari bola terlebih dahulu.

17. **Kerucut di dalam bola**.

    Gambar di samping merupakan suatu kerucut dengan $AB = AC = BC = d$. Kerucut tersebut di dalam bola. Titik puncak dan alas kerucut tersebut menyentuh bola. Tentukan volume bola tersebut.

    Petunjuk: tentukan jari-jari bola terlebih dahulu.

18. Budi mengecat tong sebanyak 14 buah. Tong tersebut berbentuk tabung terbuka dengan jari-jari 50 cm dan tinggi 1 m. Satu kaleng cat yang digunakan hanya cukup mengecat seluas 1 m^2. Tentukan berapa banyak kaleng cat yang dibutuhkan untuk mengecat semua tong. Gunakan $\pi = \frac{22}{7}$.

19. Gambar di bawah ini merupakan 3 macam desain kolam renang. Skala yang digunakan adalah 1 : 200.

    a. Perkirakan/taksir luas bangun pada tiap-tiap desain. Nyatakan jawabanmu dalam satuan cm^2.
    b. Jika ketinggian kolam renang adalah 2 m, maka tentukan volume tiap-tiap desain kolam renang. Nyatakan jawabanmu dalan satuan m^3.

20. **Globe**. Globe merupakan tiruan bumi yang berbentuk bola. Terdapat suatu globe dengan diameter 30 cm. Jika skala pada globe tersebut adalah 1 : 20.000.000, tentukan luas permukaan bumi.

    Gunakan $\pi = 3{,}14$ dan nyatakan jawabanmu dalam satuan km^2.

DAFTAR PUSTAKA

Fathani, A. H., 2013, *Ensiklopedi Matematika*, Jogjakarta: Ar-Ruzz Media

Haese, R., dkk, 2006, *Mathematics for Year 9 Sixth Edition*, Australia: Haese and Harris Publications.

Haese, R., dkk, 2007, *Mathematics for Year 8 Sixth Edition*, Australia: Haese and Harris Publications.

Hollands, Roy, 1999, *Kamus Matematika (A Dictionary of Mathematics)*, Alih Bahasa Naipospos Hutauruk, Jakarta: Erlangga.

Hoon, T. P., dkk, 2007, *Math Insights Secondary 3A Normal (Academic)*, Singapore: Pearson Education South Asia Pte Ltd.

Hoon, T. P., dkk, 2007, *Math Insights Secondary 3B Normal (Academic)*, Singapore: Pearson Education South Asia Pte Ltd.

Kemdikbud, 2013, *Matematika Kelas VII SMP/MTs: Buku Siswa Semester 1*, Jakarta: Puskurbuk.

Kemdikbud, 2013, *Matematika Kelas VII SMP/MTs: Buku Siswa Semester 2*, Jakarta: Puskurbuk.

Kemdikbud, 2013, *Matematika Kelas VIII SMP/MTs: Buku Siswa Semester 1*, Jakarta: Puskurbuk.

Kemdikbud. 2013. *Matematika Kelas VIII SMP/MTs: Buku Siswa Semester 2*, Jakarta: Puskurbuk.

Keung, C. W., 2010, *Discovering Mathematics 2A*, Singapore: Star Pubilshing Pte Ltd.

Larson, R dan Boswell L, 2014, *Big Ideas Math Advanced 1 A Common Core Curriculum California Edition*.

Larson, R dan Boswell L, 2014, *Big Ideas Math Advanced 2 A Common Core Curriculum California Edition*.

Lynch, B., 2009, *Ensiklopedia Matematika Terapan MATEMATIKA DALAM SAINS (Math in SCIENCE)*, Alih Bahasa Didik Hari Pambudi, Jakarta: Cempaka Putih.

Lynch, B., 2009, *Ensiklopedia Matematika Terapan MATEMATIKA DALAM TEKONOLOGI (Math in TECHNOLOGY)*, Alih Bahasa Rizka Yanuarti, Jakarta: Cempaka Putih.

McSeveny, A. dkk, 1997, *Signpost Mathematics 9 Intermediate Level Second Edition*, Australia: Addison Wesley Longman Australia.

PISA 2012 Assessmentand Analytical FrameworkMathematics, Reading,

Science,Problem Solving and Financial Literacy ,http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf, diunduh tanggal 7 Mei 2014.

PISA 2012 Released Mathematics Items, http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2012-2006-rel-items-maths-ENG.pdf, diunduh tanggal 7 Mei 2014.

Pulgies, S. dkk, 2007, *Mathematics for Year 7 Second Edition*, Australia: Haese and Harris Publications.

Seng T. K. dan Yee L. C., 2010, *Mathematics 1 6th Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte Ltd.

Seng T. K. dan Yee L. C., 2010, *Mathematics 2 6th Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte Ltd.

Seng T. K. dan Yee L. C., 2008, *Mathematics 3 6th Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte Ltd.

Seng T. K. dan Keong L. C., 2000, *New Syllabus D Mathematics 2 Fourth Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte Ltd.

Suwarsono, 2006, *Matematika Sekolah Menengah Pertama 9*, Jakarta: Widya Utama.

Tampomas, H., 2005, *Matematika 3 Untuk SMP/MTs Kelas IX*, Jakarta: Yudhistira.

Thomson, S., Forster, I., 2009, *Ensiklopedia Matematika Terapan MATEMATIKA DALAM LINGKUNGAN (Math in THE ENVIRONMENT)*, Alih Bahasa Andri Setyawan, Jakarta: Cempaka Putih.

Thomson, S., Forster, I., 2009, *Ensiklopedia Matematika Terapan MATEMATIKA DALAM MASYARAKAT (Math in COMMUNITY)*, Alih Bahasa Rizka Yanuarti, Jakarta: Cempaka Putih.

Thomson, S., Forster, I., 2009, *Ensiklopedia Matematika Terapan MATEMATIKA DALAM RANCANG BANGUN (Math in BUILDING DESIGN)*, Alih Bahasa Rachmad Isnanto, Jakarta: Cempaka Putih.

Thomson, S., Forster, I., 2009, *Ensiklopedia Matematika Terapan MATEMATIKA DI TEMPAT KERJA (Math in the WORKPLACE)*, Alih Bahasa Didik Hari Pambudi, Jakarta: Cempaka Putih.

TIMSS 2011 International Results in Mathematics, http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf, diunduh tanggal 7 Mei 2014.

TIMSS 2015 Assessment Frameworks, http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_Frameworks_Full_Book.pdf, diunduh Tanggal 7 Mei 2014.

Wijaya, Ariyadi., 2012, *Pendidikan Matematika Realistik Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wuan, L. Y., dkk., 2001, *Exploring mathematics Normal (Academic)*, Singapore: Pan Pacific Publishing Pte Ltd.

Sumber gambar dari internet:

www.plato.stanford.edu/entries/dedekind-foundations/,diunduh tanggal5 Juli 2014.

www.destination360.com/asia/china/great-wall-of-china,diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.smiagiung.blogspot.com/2014/08/seberapa-besar-bumi-kita-radius.html,diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.wayantulus.com/?s=samudra+pasifik,diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.greenpeace.org/international/en/campaigns/climate-change/solutions/solar/,diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.geospasial.bnpb.go.id/2009/12/15/pulau-jawa-peta-wilayah-administrasi/,diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.studentcalculators.co.uk/acatalog/Scientific_Calculators.html, diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.todayifoundout.com/index.php/2010/10/why-crackers-have-holes/, diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.tsumasaga.wordpress.com/2013/01/29/proses-terbentuknya-bumi-the-process-of-creating-bumi/,diunduh tanggal5 Juli 2014.

www.teknologi.news.viva.co.id/news/read/492008-ditemukan--planet-super-besar-di-tata-surya-terluar,diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.pixabay.com/en/football-pitch-football-rush-320100/, diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.beautiful-indonesia.umm.ac.id/id/peta/peta-indonesia.html,diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.toysrus.com/buy/brain-teasers/rubik-s-cube-4x4-5011-2267476, diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.pebbryant.blogspot.com/2010/09/rumus-rubik-3x3.html, diunduh tanggal5 Juli 2014.

www.thespeedcube.com/en/shengshou/28-shengshou-9x9-speed-cube.html, diunduh tanggal 5 Juli 2014.

www.edulens.org, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.rumahku.com, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.sosial.jw.lt/Blog/__xtblog_entry/10100593-permasalahan-penduduk-dan-dampaknya-terhadap-pembangunan-ips-smp?__xtblog_block_id=1, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.artikelbiologi.com/2013/06/perkembangbiakan-virus-replikasi-virus.html, diunduh tanggal 3 November 2014.

www.jobstreet.co.id/%20career-resources/menyelamatkan-%20karyawan-di-hari-pertama/, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.stdiis.ac.id/zakat-tabungan/, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.bimbingan.org/buat-kelereng-jadi-cepat-di-lintasan.htm, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.pedomannews.com/pilkada-dki-2012/investasi/24207-pemerintah-minta-atpm-produksi-10-mobil-murah, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.liriklaguanak.com/tukang-kayu-lirik/,diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.diketiknews.blogspot.com/2%20013/06/cara-ajari-anak-menabung-sejak-dini.html, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.portalkbr.com/berita/olahraga/3056444_4214.html, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.kabarit.com/2009/06/generasi-mobil-cerdas-dengan-robot-untuk-pembelajaran/, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.bimbingan.org/macam-macam-manager-dalam-sebuah-perusahaan.html, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.sumutpos.co/2011/10/15813/industri-lokal-merambah-manca/pabrik-sepeda, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.h4rry5450ngko.blogdetik.com/2011/12/26/, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.ipnuralam.wordpress.com/2011/06/14/cure-yourself/, diunduh tanggal 6 Juli 2014.

www.kimia.upi.edu/kimia-old/ht/mumun/joseph_louis_proust.htm,diunduh 9 November 2014.

www.windows2universe.org/people/ancient_epoch/thales.html, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.edapoenya.files.wordpress.com/2012/09/monyet-gitu1.jpg, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.kkcdn-static.kaskus.co.id, diunduh tanggal26 Juni 2014.

www.static.inilah.com/data/berita/foto/1015072.jpg, , diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.aiptek.com.tw/c0_1.php?bid=2&cid=5&pid=10, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.g-ecx.images-amazon.com/images/G/02/uk-electronics/shops/canon/2011/aplus/5x_zoom_9733_lg.jpg, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.kameradroid.com/foto/2013/12/4490_1386339255_108b9cf054078d44671114f81de757da.jpg, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.prasoudadietreviewblog.com/wp-content/uploads/2012/04/fruit-diet.jpg, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

http://www.desainic.com/wp-content/uploads/2013/08/rumah-minimalis-type-45-7.jpg, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.kereta-api.co.id/#!prettyPhoto, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.stroitelstvo-domov.net/blog/wp-content/uploads/2013/01/pantograf-1.jpg, diunduh tanggal 26 Juni 2014.

www.pesonawisatasurabaya.files.wordpress.com/2014/09/dsc00995.jpg, diunduh tanggal 10September 2014.

www.jalan2.com/forum/topic/10476-jembatan-barito/, diunduh tanggal 26 Juni 2014.
www.mathground.net/german-mathematician-carl-friedrich-gauss/,diunduh tanggal 10 November 2014.
www.profilbos.com/2014/07/31/abu-wafa-profil-biografi/,diunduh tanggal 10 November 2014.
www.storyofmathematics.com/hellenistic_diophantus.html, diunduh tanggal 3 Agustus 2014
www.sunpride.co.id/wp-content/uploads/2012/12/Sunpride-Fruit-Apel-Malang-4.jpg, diunduh tanggal 3 Agustus 2014.
www.tokobungamurah.com/wp-content/uploads/2013/09/bunga-tulip-5501.jpg, diunduh tanggal 3 Agustus 2014.
www.bungahati.net/536-728-large/bunga-mawar-kuning.jpg, diunduh tanggal 3 Agustus 2014.
www.tokorasia.weebly.com/uploads/1/5/7/1/15717464/5437004_orig.jpg, diunduh tanggal 3 Agustus 2014.
www.glarehouse.files.wordpress.com/2013/02/foods_to_help_you_control_diabetes_mango_leaves_600x450.jpg, diunduh tanggal 3 Agustus 2014
www.modelstrend.com/2013/08/foto-bayi-kembar-yang-lucu.html, diunduh tanggal 3 Agustus 2014
www.zenosphere.wordpress.com/2012/02/12/galois-matematikawan-di-tengah-revolusi/, diunduh tanggal 10 November 2014.
www.sekolah123.com/articles/view/id/194/page/bermain_trampolin, diunduh tanggal 4 Agustus 2014.
www.indonesia.travel/id/destination/253/jam-gadang, diunduh tanggal 4 Agustus 2014.
www.cindamackinnon.wordpress.com/tag/cuba-basketball-dos-four-latin-music/, diunduh tanggal 4 Agustus 2014.
www.elgisha.wordpress.com/2010/02/06/pengertian-lompat-jauh/, diunduh tanggal 4 Agustus 2014.
www.mastugino.blogspot.com/2013/11/lompat-jauh.html, diunduh tanggal 4 Agustus 2014.
www.ad4msan.com/google-bangun-jaringan-internet-melalui-balon-udara, diunduh tanggal 4 Agustus 2014.
www.idkf.bogor.net/yuesbi/e-DU.KU/edukasi.net/Transportasi/roket/semua.html, diunduh tanggal 4 Agustus 2014.
https://pixabay.com/en/dublin-o2-reflection-water-405771.

Bangun ruang	:	Objek yang memiliki dimensi panjang, lebar, tinggi. Misalnya prisma, limas, kubus.
Bangun ruang sisi lengkung	:	Bangun ruang yang memiliki sisi lengkung. Misalnya tabung, kerucut, dan bola.
Busur	:	Kurva lengkung yang berimpit dengan suatu lingkaran.
Diameter	:	Segmen garis pada lingkaran yang melalui pusat lingkaran.
Grafik	:	Representasi visual yang digunakan untuk menunjukkan hubungan numerik.
Fungsi	:	Pemetaan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain).
Fungsi kuadrat	:	Salah satu bentuk fungsi yang pangkat terbesar variabelnya adalah 2 dengan bentuk umumnya $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$.
Jarak	:	Angka yang menunjukkan seberapa jauh suatu benda berupa posisi melalui suatu lintasan tertentu.
Jari-jari	:	Ruas garis yang ditarik dari pusat lingkaran ke sebarang titik pada lingkaran; sama dengan setengah diameter.
Jaring-jaring	:	Perpaduan beberapa poligon yang dapat dibuat bangun ruang.
Keliling lingkaran	:	Panjang kurva lengkung tertutup yang berimpit pada suatu lingkaran.
Konstanta	:	Lambang yang mewakili suatu nilai tertentu.
Koordinat	:	Pasangan terurut suatu bilangan yang digunakan untuk menentukan titik pada bidang koordinat, ditulis (x, y).
Luas permukaan	:	Jumlah luas semua sisi-sisi pada bangun ruang.
Persamaan kuadrat	:	Salah satu bentuk persamaan yang pangkat terbesar variabelnya adalah 2 dengan bentuk umumnya $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$.
Refleksi	:	Salah satu jenis transformasi yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang dengan mengggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang dipindahkan.

Rotasi : Salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap.

Suku : Setiap anggota bilangan dari suatu barisan bilangan.

Sumbu-x : Garis bilangan horizontal pada bidang koordinat.

Sumbu-y : Garis bilangan vertikal pada bidang koordinat.

Teorema Phytagoras : Hubungan matematis yang menyatakan bahwa dalam segitiga siku-siku jumlah kuadrat dari panjang dua sisi sama dengan kuadrat sisi miringnya (*hipotenusa*); jika a dan b adalah panjang dua sisi segitiga siku-siku dan c adalah panjang sisi miring (hipotenusa), maka $a^2 + b^2 = c^2$.

Titik asal : Titik pada bidang koordinat yang merupakan titik potong sumbu-x dan sumbu-y; berkoordinat (0, 0).

Translasi : Salah satu jenis transformasi yang bertujuan untuk memindahkan semua titik suatu bangun dengan jarak dan arah yang sama.

Variabel :
- Simbol yang mewakili suatu bilangan dalam suatu bentuk aljabar, misal $2n + 4$, variabelnya adalah n.
- Simbol yang digunakan untuk menyatakan nilai yang tidak diketahui dalam suatu persamaan. Misal $a + 3 = 6$, variabelnya adalah a.
- Simbol yang digunakan untuk menyatakan suatu bilangan atau anggota himpunan pasangan terurut. Misal $y = x + 3$, variabelnya adalah x dan y.

Volume : Perhitungan seberapa banyak ruang yang bisa ditempati dalam suatu objek.

A...
B...
C...
Indeks

Profil Penulis

Nama Lengkap : Subchan, M.Sc, Ph.D
Telp. Kantor/HP : +62 542-8530800
E-mail : s.subchan@gmail.com; subchan@itk.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Kampus ITK Karang Joang,
Balikpapan, Kalimantan Timur 76127
Bidang Keahlian: Optimasi Dinamik

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Matematika, FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (1997 – sekarang).
2. Pusat Robotika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2009 – 2010).
3. Dosen Matematika, Institut Teknologi Kalimantan (2014 – sekarang).
4. Wakil Rektor bidang Akademik Institut Teknologi Kalimantan (2015 - sekarang).

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Defence College of Management and Technology, Department Aerospace, Power and Sensors, Guidance and Control Group, Cranfield University (2001-2005).
2. S2: Faculty Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, Department of Applied Mathematics, Technische Universiteit Delft (1998-2000).
3. S1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (1989-1994).

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Subchan, R. Zbikowski: *Computational Optimal Control: Tools and Practices,* Wiley 2009, ISBN: 978-0-470-71440-9.
2. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 1 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-765-8.
3. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 2 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-095-6.
4. *Buku Guru: Matematika SMP/MTs Kelas IX Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-086-4.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Strategi Nasional, Ministry of Education, 2014-2015: Rancang Bangun Sistem Inspeksi Peluru Kaliber 5,56 mm Berbasis Pengolahan Citra Digital Untuk Meningkatkan Produktifitas di PT. Pindad.
2. Strategi Nasional, Ministry of Education, 2013-2014: Integration Navigation, Guidance and Control for Unmanned Surface Vehicles.
3. Insentif Riset Nasional, Ministry of Research, 2012-2013: Development of Warship
4. Insentif Riset Nasional, Ministry of Research, 2011-2012: Development and Application of Navigation, Guidance and Control of Unmanned Aerial Vehicles.
5. Grand Challenge Ministry of Defense, United Kingdom, 2007–2008: Develop an integrated system with a high level and a micro Unmanned Air Vehicle, an Unmanned Ground Vehicle and a control station fusing data from visual, thermal and radar sensors.

6. Engineering and Physical Sciences Research Council (ESPRC United Kingdom) 2008–2010: Guaranteed Performance of Dynamic Behaviour of Multiple Unmanned Aerial Vehicles.
7. The Data & Information Fusion Defense Technology Centre (DIF DTC United Kingdom) 2006–2007: Develop techniques that will enable: 1). a pack of UAV sensor platforms to quickly detect a contaminant cloud. 2). the extent, shape and track of the cloud to be determined accurately and in a timely fashion.

Nama Lengkap : Winarni, S.Si, M.Si
Telp. Kantor/HP : +62 542-8530800
E-mail : wina.winarni27@gmail.com
winarni@itk.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Kampus ITK Karang Joang,
Balikpapan, Kalimantan Timur 76127

Bidang Keahlian: Aljabar Max-Plus dan terapannya

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Asisten Dosen di Fakultas Teknik Universitas Surabaya (2003 – 2004).
2. Asisten Dosen di PAPSI (D1) ITS (2003 – 2004).
3. Asisten Dosen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2004, 2008).
4. Guru di SMP Al Hikmah Surabaya (2006 – 2014).
5. Dosen Matematika FKIP Universitas Dr. Soetomo Surabaya (2005 – 2009).
6. Dosen Matematika FKIP Universitas Adhi Buana Surabaya (2010 – 2015).
7. Dosen Matematika Institut Teknologi Kalimantan (2015 – sekarang).

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, (2007 – 2009).
2. S1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, (2000 – 2005).

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Winarni, dkk: "Melejit Bersama Kami: MATEMATIKA" Hikmah Press, 2011.
2. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 1 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-765-8.
3. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 2 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-095-6.
4. *Buku Guru: Matematika SMP/MTs Kelas IX Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-086-4.
5. Aljabar Linear Elementer Jilid 1 (Edisi 1), Institut Teknologi Kalimantan, 2015.
6. Struktur Aljabar, Institut Teknologi Kalimantan, 2016.
7. *Perempuan Adalah Penentu Suatu bangsa Bahkan Dunia,* Kaltim Post, halm.28, 21 April 2016. Bisa juga diakses di http://kaltim.prokal.co/read/news/264580-perempuan-adalah-penentu-suatu-bangsa-bahkan-dunia.html
8. *Penguatan Peran Keluarga dalam Pendidikan Anak, Say No to Fatherless and Motherless,* bisa diakses di http://kaltim.tribunnews.com/2016/06/30/penguatan-peran-keluarga-dalam-pendidikan-anak-say-no-to-fatherless-and-motherless

9. *Bumi Kita Tempat Lahir Hidup dan Mati*, http://kaltim.tribunnews.com/2017/04/24/bumi-kita-tempat-lahir-hidup-dan-mati
10. *Sistem Transportasi Massal, Kebutuhan Mutlak*, Kaltim Post, halm.25, 25 April 2017. Bisa juga diakses di http://kaltim.prokal.co/read/news/298347-sistem-transportasi-massal-kebutuhan-mutlak.html
11. *Berkaca Kembali Pada Ajaran Ki Hajar Dewantara*, bisa diakses di https://izi.or.id/berkaca-kembali-pada-ajaran-ki-hajar-dewantara-tulisan-pertama dan https://izi.or.id/berkaca-kembali-pada-ajaran-ki-hajar-dewantara-tulisan-terakhir

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. *An optimal control strategies using vaccination and fogging in dengue fever transmission model,* AIP Conference Proceedings 1867, 020068 (2017); doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4994471
2. *Urgensi Pembiasaan Soal Standart PISA Pada pembelajaran Matematika SMP* dalam Konferensi Nasional Matematika XVII Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan IndoMS, 2014.
3. *Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota dengan Model Petrinet dan Aljabar Max-Plus (Studi Kasus Busway TransJakarta)*, Caucy - Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi, Vol 1, 2011. http://ejournal.uin-malang.ac.id/index.php/Math/article/view/1796/pdf
4. *Model Aljabar Max-Plus untuk Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota*, Prosiding Seminar Nasional Matematika IV, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya 2008.
5. *Penyelesaian Persamaan Dilasi di $L^2(R)$*, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, 2005.

Nama Lengkap : Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si, M.Si
Telp. Kantor/HP : +62 31-5943354
E-mail : mr.latin.square@gmail.com
Akun Facebook : Muhammad Syifa'ul Mufid
Alamat Kantor : Jurusan Matematika Gedung F Lantai II Kampus ITS, Keputih, Sukolilo, Surabaya 60111
Bidang Keahlian: Latin square, Min-max-plus systems

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Asisten Dosen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2010 - 2013).
2. Dosen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2014 – sekarang).

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember ITS, (2011 – 2013).
2. S1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, (2008 – 2012).

- **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**
  1. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 1 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-765-8.
  2. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 2 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-095-6.
  3. *Buku Guru: Matematika SMP/MTs Kelas IX Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-086-4.

- **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**
  1. Smart Generative Algorithm (Smart Gen-A): 2d Architectural Photo Converter to be The Digital 3D Object, 2011.
  2. Eigenvalues and Eigenvectors Of Latin Squares In Max-Plus Algebra, 2014.
  3. Eigenproblemsof Latin Squares In Bipartite (Min, Max,+)-Systems, 2014.
  4. On The Lagrange Interpolation of Fibonacci Sequences, 2015.

Nama Lengkap : Kistosil Fahim, S.Si, M.Si
Telp. Kantor/HP : +62 31-5943354
E-mail : kfahim@matematika.its.ac.id
Akun Facebook : Kistosil Fahim
Alamat Kantor : Jurusan Matematika Gedung F Lantai II Kampus ITS, Keputih, Sukolilo, Surabaya 60111
Bidang Keahlian: Analisis dan Aljabar, Stokastik Persamaan Diferensial Parsial

- **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**
  1. Asisten Dosen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2010 - 2013).
  2. Dosen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2014 – sekarang)
  3. Tim Penyusun Soal OSN SD (2016 – sekarang).

- **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**
  1. S2: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2012 – 2014)
  2. S1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2009 – 2013)

- **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**
  1. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 1 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-765-8.
  2. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 2 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-095-6.
  3. *Buku Guru: Matematika SMP/MTs Kelas IX Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-086-4.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. On computing supply chain scheduling using max-plus algebra, 2016.
2. Generalization Public Transportation Scheduling Using Max-Plus Algebra, 2015.
3. Konstruksi Transformasi MP-Wavelet Tipe A, 2014.
4. Pemodelan Jadwal Monorel Dan Trem Menggunakan Aljabar Max-Plus untuk Transportasi Masa Depan Surabaya, 2014.
5. Monorail and Tram scheduling which integrated in Surabaya using Max-Plus Algebra, 2014.

Nama Lengkap : Wawan Hafid Syaifudin, S.Si, M.Si
Telp. Kantor/HP : +62 81 553 788 917
E-mail : wawan.hafid@gmail.com
Akun Facebook : Wawan Hafid
Alamat Kantor : Jurusan Matematika Gedung F Lantai II Kampus ITS, Keputih, Sukolilo, Surabaya 60111

Bidang Keahlian: Kontrol Sistem, Aktuaria, Matematika Keuangan

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Asisten Dosen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2011 – 2013).
2. Dosen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2016 – sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2013 – 2015)
2. S1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2009 – 2013)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 1 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-765-8.
2. *Buku Siswa: Matematika SMP/MTs Kelas IX Semester 2 Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-095-6.
3. *Buku Guru: Matematika SMP/MTs Kelas IX Edisi 1*, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI, 2015. ISBN: 978-602-282-086-4.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Application of Model Predictive Control (MPC) For Stock Portfolio Optimization, 2015.
2. Ship Heading Control of Corvette Sigma With Disturbance Using Model Predictive Control, 2014.
3. Application of Model Predictive Control ForShip Heading Control, 2013.

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Dr. Agung Lukito, M.S.
Telp. Kantor/HP : +62 31 829 3484
E-mail : gung_lukito@yahoo.co.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Kampus Unesa Ketintang
Jalan Ketintang Surabaya 60231
Bidang Keahlian: Matematika dan Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

2010 – 2016: Dosen pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Faculty of Mathematics and Informatics/Delft University of Technology (1996 – 2000)
2. S2: Fakultas Pascasarjana/Matematika/ITB Bandung (1988 – 1991)
3. S1: Fakultas PMIPA/Pendidikan Matematika/Pendidikan Matematika/ IKIP Surabaya (1981 – 1987)

Judul buku yang pernah ditelaah (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7, 8 dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, 9 dan 10, 11, 12 (2015)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Perangkat Pendampingan Guru Matematika SD dalam Implementasi Kurikulum 2013 (2014)
2. Peluang Kerjasama Unit Pendidikan Matematika Realistik Indonesia dengan Pemangku Kepentingan, LPPM Unesa (2013)
3. Pemanfaatan Internet untuk Pengembangan Profesi Guru-guru Matematika SMP RSBI/SBI Jawa Timur, 2010, (Stranas 2010)
4. Relevansi Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) dengan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP), 2009, (Stranas 2009)

Nama Lengkap : Drs. Turmudi, ., M.Sc., Ph.D.
Telp. Kantor/HP : (0264)200395/ 081320140361
E-mail : turmudi@upi.edu
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl. Veteran 8 Purwakarta
Jl. Dr. Setiabudi 229 Bandung
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika di S1, S2, dan S3 Universitas Pendidikan Indonesia
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika 2007-2015

3. Ketua Prodi S2 dan S3 Pendidikan Matematika SPs UPI, 2012-2015 (dalam konteks terintegrasi dengan S1 Pendidikan Matematika FPMIPA UPI)
4. Direktur Kampus Daerah UPI Purwakarta, 2015- Sekarang

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**
1. S3: Mathematics Education, Graduate School of Education, Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
2. S2: Educational and Training System Designs, Twente University Enschede, Th
3. S2: Mathematics Education (Graduate School of Education), Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
4. S1: Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1984-1986).
5. D3: Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1983-1984).
6. D2: Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1980-1982).

■ **Judul buku yang pernah ditelaah (10 Tahun Terakhir):**
1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7, 8 dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, 9 dan 10, 11, 12 (2015)

Nama Lengkap : Prof. Dr. St. Suwarsono
Telp. Kantor/HP : -
E-mail : stsuwarsono@gmail.com
Akun Facebook : Stephanus Suwarsono
Alamat Kantor : Jalan Affandi, Mrican, Teromolpos 29, Yogyakarta 55002.
Bidang Keahlian: Matematika dan Pendidikan Matematika

■ **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**
Dosen tetap dengan jabatan akademik guru besar di Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (JPMIPA), Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**
1. S3: Faculty Education/Mathematics Education/Monash University (1977 – 1982)
2. S1: Fakultas Fakultas Keguruan Ilmu Eksakta/Ilmu Pasti dan Alam/Pendidikan Matematika/ IKIP Sanata Dharma Yogyakarta (1968 – 1974)
3. D3: Fakultas Fakultas Keguruan Ilmu Eksakta/Ilmu Pasti dan Alam/Pendidikan Matematika/ IKIP Sanata Dharma Yogyakarta (1968 – 1970)

■ **Judul buku yang pernah ditelaah (10 Tahun Terakhir):**
1. Buku Teks Matematika Kelas 9 (2015)
2. Buku Teks Matematika Kelas 12 (2015)

Profil Editor

Nama Lengkap : Heny Kusumawati, S.Si.
Telp. Kantor/HP : (0272)322441
E-mail : kusumawati.heny@yahoo.com
Akun Facebook : Heny Kusumawati
Alamat Kantor : Jl. Ki Hajar Dewantoro, Klaten
Bidang Keahlian : Penulis, editor

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 2000 – 2016 : Penulis, editor di PT Intan Pariwara, Klaten.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Fakultas MIPA/Matematika/Matematika/Universitas Gadjah Mada Yogyakarta (1988 – 2004)

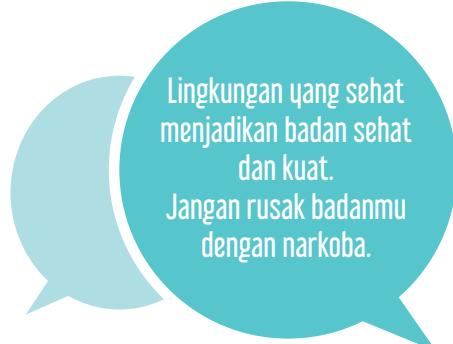
Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku teks Pelajaran Matematika Kelas IX edisi revisi kurikulum 2013
2. Buku teks Pelajaran Prakarya dan Kewirausahaan Kelas XII edisi revisi kurikulum 2013

Profil Ilustrator

Nama Lengkap : Erwin
Telp. Kantor/HP : +62 823 4881 9452
E-mail : wienk1241@gmail.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Kp. Situpete RT 002 RW 002
Kelurahan Sukadamai
Kecamatan Tanah Sareal, Bogor 16165

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

2015 – 2016 : Freelancer Yudhistira
2013 – sekarang : Freelancer Pusat Kurikulum dan Perbukuan
2013 – sekarang : Freelancer Agro Media Group
2012 – 2014 : Layouter CV. Bintang Anaway Bogor
2004 – 2012 : Layouter CV Regina Bogor

Judul buku yang pernah dikerjakan (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika Kelas 9, Kemendikbud
2. Buku Teks Matematika Kelas 10, Kemendikbud
3. SBMPTN 2014, CMedia
4. TPA Perguruan Tinggi Negeri & Swasta, CMedia

Lingkungan yang sehat menjadikan badan sehat dan kuat.
Jangan rusak badanmu dengan narkoba.